

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

# **Magnetismo**

P. Fonte

**Cadeira de Electricidade e Magnetismo**

Curso de Informática

1997/98

<b>1. Magnetismo</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Introdução ao magnetismo</b>	<b>1</b>
1.1.1 O campo magnético	1
1.1.2 O ferromagnetismo	2
<b>1.2 Circuitos Magnéticos</b>	<b>5</b>
<b>1.3 Indução magnética (Lei de Faraday)</b>	<b>8</b>
<b>1.4 Sistemas magnéticos com uma bobina</b>	<b>10</b>
1.4.1 O princípio da energia mínima	10
1.4.2 A energia magnética	11
1.4.3 As forças magnéticas	12
<b>1.5 Sistemas magnéticos com duas bobinas</b>	<b>14</b>
1.5.1 O circuito magnético	14
1.5.2 A energia magnética	16
1.5.3 As forças magnéticas	16
<b>1.6 Sumário</b>	<b>18</b>
<b>1.7 Aplicações</b>	<b>21</b>
1.7.1 Transformadores	21

# 1. Magnetismo

Uma classe extremamente importante de dispositivos eléctricos são de facto máquinas magnéticas. Motores, geradores, transformadores, discos magnéticos, disjuntores e relés, são exemplos importantes. Este capítulo pretendemos desenvolver uma teoria mínima do Magnetismo, que nos permita abordar os aspectos fundamentais destes dispositivos.

## 1.1 Introdução ao magnetismo

### 1.1.1 O campo magnético

Em torno de qualquer condutor percorrido por uma corrente eléctrica desenvolve-se uma entidade física que se denomina campo magnético. O campo magnético por sua vez pode exercer dois tipos de efeitos dentro da sua zona de influência: pode exercer forças sobre outras correntes ou pode, quando varia de intensidade, induzir forças electromotrizes em condutores. Na maioria das máquinas magnéticas ambos os efeitos produzem-se simultaneamente e são fundamentais para o funcionamento das mesmas.

O campo magnético designa-se pela letra  $B$  e tem como unidade o Tesla:  $[B]=T$ . Designaremos daqui para diante o campo eléctrico produzido no ar pela acção única das correntes como  $B_0$  e o campo magnético produzido no interior dos materiais ferromagnéticos como  $B$ .

Em torno de um condutor percorrido por uma corrente eléctrica o campo magnético descreve linhas de força circulares, tal como é ilustrado na figura 1. Um segundo condutor paralelo ao primeiro e que conduza corrente no mesmo sentido sentirá a acção duma força magnética atractiva  $F$ . Esta força é simultaneamente perpendicular à direcção da corrente e à direcção das linhas de campo nesse ponto.

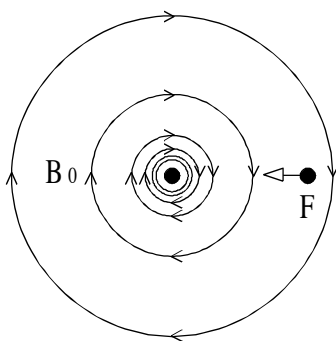


Figura 1- As linhas de campo magnético  $B_0$  em torno de um condutor descrevem círculos concêntricos. A distância entre os círculos desenhados corresponde a uma diferença constante na intensidade do campo, donde se conclui que o campo é mais intenso na proximidade do fio (ponto negro central). A corrente atravessa o papel de cima para baixo.

Se um mesmo condutor for enrolado em forma de bobina (solenóide) o campo magnético total será dado pela soma do campo de todas as espiras, tal como está representado na figura 2.

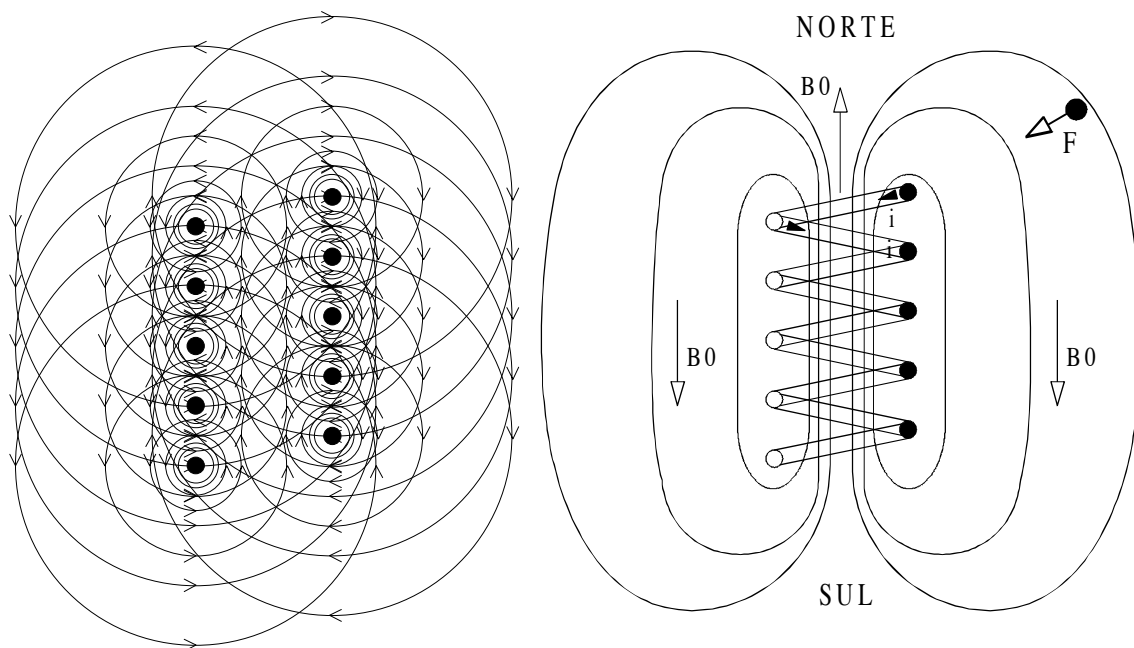


Figura 2- Representação aproximada das linhas de campo magnético  $B_0$  em torno de um solenóide. Os campos somam-se quando as linhas de campo têm o mesmo sentido e subtraem-se quando têm sentidos contrários. À esquerda representam-se as linhas de campos de cada espira e à direita a sua soma aproximada.

Por convenção designa-se por pólo norte a região de um íman ou electroíman de onde emergem as linhas de campo e por pólo sul a região por onde imergem.

### 1.1.2 O ferromagnetismo

É, em geral, difícil de calcular a configuração do campo magnético e as forças por este exercidas para um arranjo arbitrário de correntes. No entanto a situação é muito mais simples quando são introduzidos materiais ferromagnéticos no seio do campo  $B_0$ , situação que corresponde também ao caso com mais interesse do ponto de vista tecnológico.

Os materiais ferromagnéticos amplificam centenas de vezes o campo a eles aplicado ( $B_0$ ) através do alinhamento das suas correntes atómicas com  $B_0$  (ver figura 3). Esta propriedade é característica de uma classe de materiais das quais o ferro e algumas das suas ligas são os mais importantes. Ao campo resultante constituído pela soma de  $B_0$  com o campo gerado pelas correntes atómicas vamos denominar  $B$ . Para os materiais correntes  $B$  pode ser até mil vezes superior a  $B_0$ .

Acima da chamada Temperatura de Curie, que depende do tipo de material, o calor destrói o alinhamento das correntes atómicas e o fenómeno ferromagnético.

Existe uma relação não linear entre  $B_0$  e  $B$ , (ver figura 4) pois quando todas as corrente atómicas já se encontram alinhadas não é possível aumentar  $B$  de forma sensível, atingindo-se a saturação magnética correspondente ao campo  $B_{sat}$ . É comum o valor de  $B_{sat}$  ser em torno de  $1 T$ .

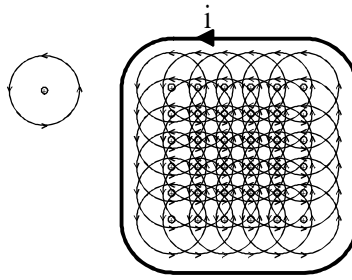


Figura 3- À esquerda: representação de um átomo com o núcleo central positivo e a corrente atômica circular resultante do movimento dos electrões em torno do núcleo?. À direita: num material ferromagnético completamente magnetizado as correntes atômicas circulam todas no mesmo sentido, de modo que a corrente total é nula no interior do material mas pode ser considerável à superfície do mesmo.

Outro fenómeno interessante é o facto de que quando o campo aplicado  $B_0$  é retirado ( $B_0=0$ ) o campo total  $B$  poderá não se anular completamente, mantendo um valor denominado campo remanescente ( $B_r$ ). Se invertermos o sinal de  $B_0$  eventualmente o campo total virá a anular-se e até a inverter o seu sentido, mas neste caso quando  $B_0$  for retirado persistirá um campo remanescente  $-B_r$ . Ao gráfico resultante deste processo chama-se curva de histerese. O magnetismo remanescente tem origem no facto de que algumas correntes atômicas permanecem alinhadas mesmo na ausência de campo aplicado.

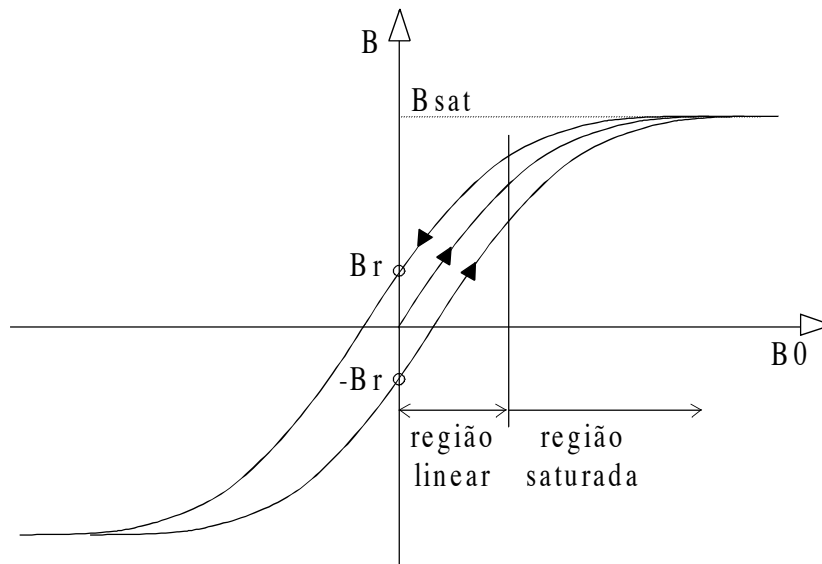


Figura 4- Exemplo de curva de histerese genérica. Diferentes materiais ferromagnéticos possuem diferentes curvas de histerese, de acordo com a aplicação para estes pretendida. Quando o campo magnético é aplicado segue-se a curva inferior e quando é retirado segue-se a curva superior.

Os ímanes permanentes são constituídos por materiais com um magnetismo remanescente elevado e curva de histerese quase quadrada. A gravação magnética de informação depende da criação na superfície de discos cobertos de material ferromagnético (óxidos de ferro) de pequenos ímanes permanentes cujo campo magnético remanescente ( $B_r$ ) pode ser positivo ou negativo. As memórias RAM de ferrite, utilizadas nos computadores dos anos 60, exploravam também este fenómeno, bem como as futuras memórias de bolhas magnéticas.

Na maior parte das aplicações em que se pretende variar rapidamente o campo  $B$ , tal como nos motores e transformadores, o fenómeno de histerese é prejudicial pois leva a uma perda de energia por aquecimento, correspondente a um "atrito magnético". Para estas aplicações escolhem-se materiais com um valor reduzido de  $B_r$ .

Neste caso, e para a região linear da curva de histerese, podemos considerar que existe proporcionalidade entre  $B$  e  $B_0$  na forma:

$$B = \mu_r B_0$$

onde a constante de proporcionalidade,  $\mu_r$ , denominada permeabilidade magnética relativa, é adimensional, e tem um valor entre algumas centenas e um milhar para os materiais ferromagnéticos e muito perto da unidade para os restantes materiais, incluindo o ar. Já encontrámos esta quantidade, que resume as propriedades magnéticas básicas dos materiais, no contexto das linhas de transmissão, onde contribuía para o valor de  $L_0$ .

## 1.2 Circuitos Magnéticos

O cálculo do campo magnético em presença de materiais ferromagnéticos simplifica-se muito pois podemos, com boa aproximação, desprezar o campo magnético que existir fora do ferro, uma vez que o que existe no interior é centenas de vezes maior. Os materiais ferromagnéticos funcionam neste contexto como verdadeiros "condutores magnéticos".

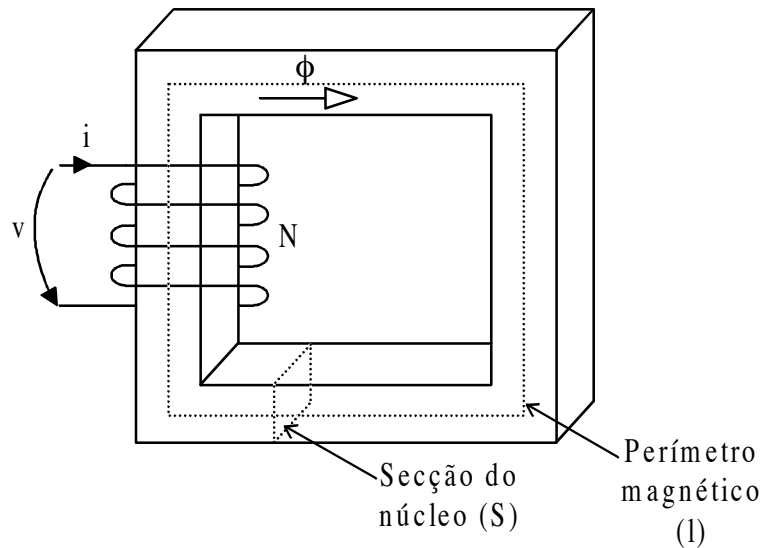


Figura 5- Exemplo de circuito magnético com definição das quantidades mais importantes: a bobina tem N espiras, é percorrida por uma corrente  $i$  e desenvolve aos terminais uma tensão  $v$ ; o núcleo tem secção  $S$ , perímetro médio  $l$  e é percorrido pelo fluxo magnético  $\phi$ .

No contexto das máquinas magnéticas o fluxo magnético ( $\phi$ ) é uma quantidade mais útil que o campo magnético  $B$ . O fluxo magnético define-se como a intensidade do campo que atravessa uma superfície multiplicada pela área  $S$  dessa superfície:

$$\phi = S B$$

e que tem como unidade o Weber:  $[\phi] = \text{Wb} = \text{T m}^2$ .

Nas condições da figura 5 existe uma relação fundamental entre as diversas quantidades definidas chamada Lei de Hopkinson, que é uma aplicação particular da Lei de Ampere - uma das leis básicas da Natureza:

$$N i = \mathcal{F} = \mathcal{R} \phi \quad (1)$$

onde  $\mathcal{F} = Ni$  é a força magnetomotriz, e tem como unidade o Ampere-espira ( $[\mathcal{F}] = \text{Ae}$ ),  $\mathcal{R}$  é a relutância magnética e tem como unidade o Henry inverso:  $[\mathcal{R}] = \text{Ae/Wb} = \text{H}^{-1}$ . Existe uma quantidade relacionada com  $\mathcal{R}$ , denominada permeância magnética ( $\Lambda$ ),

$$\Lambda = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

que tem como unidade o Henry:  $[\Lambda] = \text{Wb}/\text{Ae} = \text{H}$ .

O sentido do fluxo magnético criado por uma bobina é determinado pela "regra da mão direita": se colocarmos a mão direita em torno da bobina de modo que os dedos sejam paralelos às espiras e a corrente circule da palma da mão para a ponta dos dedos então o sentido do fluxo magnético criado pela bobina é indicado pelo polegar.

A relutância pode ser calculada como

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} \quad (2)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo: uma constante fundamental da Natureza com valor  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ . Designou-se por  $l$  o perímetro médio do circuito magnético percorrido pelo fluxo  $\phi$ .

Existe uma grande similaridade entre os circuitos eléctricos e magnéticos. De facto a eq. (1) é muito semelhante à lei de Ohm e a eq. (2) é semelhante à fórmula de cálculo da resistência de um condutor. Outras leis do Magnetismo, que não estão expostas acima, permitem-nos concluir que existem para os circuitos magnéticos leis equivalentes às leis de Kirchhoff dos circuitos eléctricos.

Grandezas eléctricas		Grandezas magnéticas	
Nome	Símbolo	Símbolo	Nome
tensão	v	$\mathfrak{F}$	força magnetomotriz
corrente	i	$\phi$	fluxo magnético
resistência	R	$\mathfrak{R}$	relutância
condutância	$G=1/R$	$\Lambda=1/\mathfrak{R}$	permeância
resistividade	$\rho$	$1/\mu_r \mu_0$	-
condutividade	$\sigma=1/\rho$	$\mu_r \mu_0$	permitividade
secção do condutor	S	S	secção do núcleo
comprimento do condutor	l	l	comprimento do circuito magnético
lei dos nós	$\sum i_j = 0$	$\sum \phi_j = 0$	-
lei das malhas	$\sum v_j = 0$	$\sum \mathfrak{F}_j = 0$	-

O coeficiente de auto-indução (ou indutância)  $L$  já utilizado em corrente alternada para descrever as indutâncias pode ser escrito em termos das grandezas acima definidas como:

$$L = \frac{N\phi}{i} = \Lambda N^2 \quad (3)$$



sendo de notar que  **$L$  depende apenas de factores geométricos**. O fluxo magnético pode ser calculado a partir da corrente e do coeficiente. de auto-indução como

$$\phi = \frac{L i}{N} \quad (4)$$

No contexto da teoria acima exposta os ímanes permanentes podem ser descritos por

$$\mathcal{S} = \text{constante} \quad (\text{íman permanente})$$

### 1.3 Indução magnética (Lei de Faraday)

Uma das mais importantes leis básicas da Natureza é a Lei de Faraday ou lei da indução magnética. Esta lei, que por ser um princípio fundamental não se demonstra, diz que aos terminais de uma bobina em cujo interior passe um fluxo magnético  $\phi_T$  (ver figura 6) desenvolve-se uma tensão por espira proporcional à taxa de variação do fluxo.

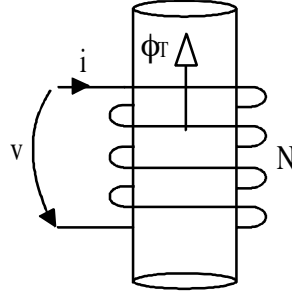


Figura 6- Definição de grandezas para aplicação de lei de Faraday

$$v = \frac{d(N \phi_T)}{dt} \quad (5)$$

Utilizámos a denominação  $\phi_T$  para o fluxo total que passa no interior da bobina de modo a distingui-lo do fluxo próprio criado pela bobina,  $\phi$ , que foi definido na secção anterior. De facto podemos decompor  $\phi_T$  numa componente própria dada pela eq. (4) e numa componente externa à bobina em consideração

$$\phi_T = \phi + \phi_{ext} \quad (6)$$

Ao produto  $N\phi_T$  chama-se o “fluxo concatenado com a bobina”. Utilizando a eq. (4) podemos rescrever a eq. (5) como

$$v = \frac{d(L i)}{dt} + \frac{d(N \phi_{ext})}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \frac{d(N \phi_{ext})}{dt} \quad (7)$$

O membro direito desta equação contém três parcelas que no seu conjunto constituem a tensão total aos terminais da bobina. A primeira parcela corresponde à tensão induzida devido a variações do fluxo próprio provocadas por variações da corrente (já encontramos esta expressão no nosso estudo do comportamento das indutâncias em C.A.). A segunda parcela contempla tensões induzidas devido a variações do fluxo próprio provocadas por alterações geométricas no circuito magnético (atenda-se a que  $L$  só depende de grandezas geométricas - ver eq. (3)). A terceira parcela corresponde à tensão induzida devido a variações do fluxo total devidas a outras fontes (externas) de fluxo existentes no circuito: outras bobinas por exemplo.

É interessante considerarmos o que acontece se curto-circuitarmos ( $v=0$ ) a bobina da figura 6. Admitindo que o fio condutor de que é feita não tem resistência, tal como acontece nos materiais supercondutores, a eq. (5) diz-nos que o fluxo total que atravessa a bobina deve ser constante ( $\phi_T = \text{constante}$ ). Se supusermos que quando o curto-circuito foi efectuado o fluxo total era nulo ( $\phi_T=0$ ) então a eq. (6) diz-nos que o fluxo próprio

deve ser igual e de sinal contrário ao fluxo exterior ( $\phi_T = -\phi_{ext}$ ) e a eq. (4) diz-nos que deve circular na bobina uma corrente ( $i = -\phi_{ext} N/L$ ). É com base neste fenómeno que se explica a levitação magnética dos supercondutores, tal como é ilustrado na figura 7.

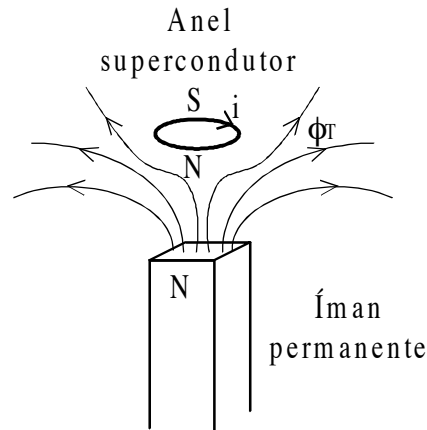


Figura 7- Princípio da levitação magnética: uma vez que as linhas de campo não podem atravessar o anel é induzida neste uma corrente que cria um fluxo magnético de sentido oposto ao do campo externo e que afasta as linhas do mesmo. Os pólos de mesmo nome repelem-se gerando uma força magnética que contraria a força da gravidade.

No caso de uma bobina qualquer (com resistência) submetida a uma variação externa de fluxo o cancelamento da variação de fluxo não é completo devido à presença de resistência no circuito, mas a corrente induzida é sempre tendente a anular a variação de fluxo externo. Dá-se a este facto o nome de Lei de Lenz.

## 1.4 Sistemas magnéticos com uma bobina

### 1.4.1 O princípio da energia mínima

Não existindo em princípio no sistema magnético em consideração dissipação de energia por via calorífica (pode ser incluído acrescentando resistências) toda a energia administrada ao sistema por qualquer forma será armazenada de forma reversível sob a forma de energia potencial magnética (energia interna). Esta energia pode ser integralmente retirada do sistema sem qualquer perda.

Qualquer sistema físico com estas propriedades chama-se conservativo, por oposição aos sistemas dissipativos nos quais uma fracção ou toda a energia fornecida é transformada em calor e portanto não pode ser recuperada na totalidade. Em cada sistema conservativo a energia interna depende do valor de certas grandezas físicas que lhe são características denominadas variáveis de estado (cada tipo de sistema tem as suas variáveis de estado) mas não depende da forma como foi introduzida no sistema. Por exemplo, um motor eléctrico converte energia eléctrica em energia magnética e energia magnética em energia mecânica enquanto um gerador faz o contrário. Podem existir para o mesmo sistema diversos conjuntos equivalentes de variáveis de estado.

Vamos supor que num determinado sistema a energia interna ( $E_{int}$ ) é uma função conhecida de duas variáveis de estado,  $a$  e  $b$  e que uma destas variáveis é função da posição ( $x$ ) de algum componente móvel do sistema, digamos  $a=a(x)$ .

$$E_{int} = E(a(x), b)$$

Sobre este componente móvel poderemos exercer a partir do exterior uma força  $F_{ext}$  ( $[F]=\text{Newton}=J/m$ ), fornecendo deste modo energia mecânica ao sistema. Para um pequeno deslocamento  $dx$  a energia mecânica fornecida será

$$dE_{mec} = F_{ext} dx.$$

Esta força externa terá que ser, bem entendido, contrabalançada por uma força  $F$  igual e oposta exercida pelo sistema sobre o exterior

$$F = -F_{ext}.$$

Se mantivermos  $b$  constante toda a variação da energia interna será feita por via mecânica, de modo que devemos ter

$$F_{ext} = \frac{dE_{mec}}{dx} = \left( \frac{dE(a(x), b)}{dx} \right)_{b=\text{constante}} = \frac{\partial E(a, b)}{\partial a} \frac{da(x)}{dx}$$

Se quisermos saber qual a força exercida pelo sistema sobre o exterior teremos

$$F = - \left( \frac{dE(a(x), b)}{dx} \right)_{b=\text{constante}} \quad (8)$$

O sinal negativo implica que a força tende a colocar o sistema na posição correspondente à sua energia interna mínima, o que constitui uma propriedade geral dos sistemas físicos conservativos. Chama-se por vezes ao método utilizado para obter este resultado o princípio dos trabalhos virtuais.

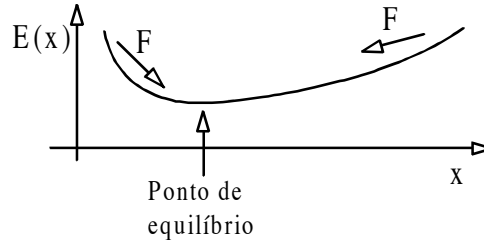


Figura 8- Ilustração do princípio da energia mínima.

A potência mecânica desenvolvida pelo sistema é dada por

$$P_{mec} = F v_0 = \frac{\partial E}{\partial a} \frac{da}{dt}$$

onde  $v_0$  é a velocidade de deslocamento da parte móvel sobre a qual a força é exercida.

### 1.4.2 A energia magnética

Uma vez que o valor da energia potencial não depende da forma como foi introduzida no sistema vamos considerar um caso simples para determinar esta função: o aumento da corrente de 0 até um determinado valor mantendo constante a geometria do sistema e o fluxo externo.

De acordo com os sentidos convencionados para a tensão e corrente na figura 6 a potência flui do exterior para o interior do sistema magnético. Utilizando a eq. (6) podemos rescrever a eq. (5) como

$$v = N \frac{d\phi}{dt}$$

Multiplicando por  $i \cdot dt^\dagger$  e utilizando a eq. (1) podemos formar a expressão

$$dE_{int} = iv dt = \mathcal{R} \phi d\phi \quad (9)$$

que corresponde à quantidade de energia eléctrica que flui para o sistema magnético no intervalo de tempo  $dt$  ( $iv$  é a potência, que multiplicada pelo tempo  $dt$  é igual à energia). Integrando obtemos

$$E_{int}(\mathcal{R}(x), \phi) = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi^2 \quad (10)$$

onde salientámos que a relutância pode, em princípio, ser função de  $x$ . Este sistema contém duas variáveis de estado, a relutância e o fluxo próprio.

Podemos ainda mudar de variáveis utilizando a eq. (3) para obter

$$E_{int}(L(x), i(x)) = \frac{1}{2} L i^2$$

---

<sup>†</sup> Considerando a derivada (p.ex.  $dx/dt$ ) como a razão entre uma pequena variação de  $x$ ,  $dx$ , que ocorre num pequeno intervalo de tempo  $dt$ . Este ponto de vista coincide com a derivada matemática no limite  $dt \rightarrow 0$ .

mas neste caso tanto  $L$  como  $i$  podem ser funções de  $x$ .

### 1.4.3 As forças magnéticas

. Utilizando as eqs. (8) e (10) concluímos que a força de origem magnética será dada por

$$F = - \frac{d E_{int}(\mathcal{R}(x), \phi)}{dx}$$

que se explicita como

$$F = - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (11)$$

onde utilizámos a eq. (3) para obter a segunda igualdade. As forças que se obtêm deste modo chamam-se forças de relutância variável pois provêm da variação da relutância magnética do circuito. A relutância calcula-se explicitamente a partir da eq. (2).

Na dedução da equação (9) foi assumido que o deslocamento  $dx$  era linear e paralelo à força  $F$ , tal como está exemplificado na figura 9.

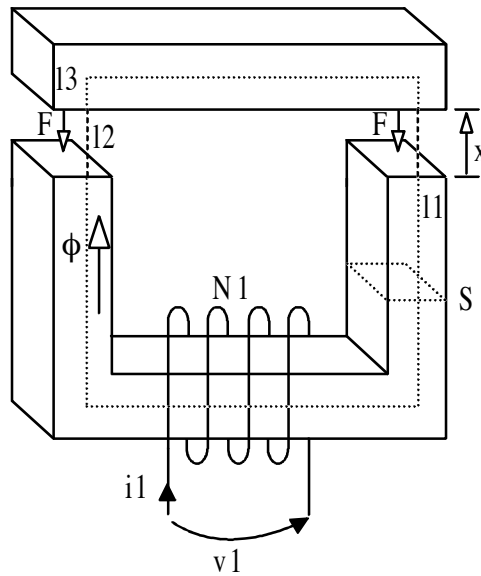


Figura 9- Exemplo de um sistema magnético que exerce uma força de relutância linear.

No caso de um sistema rotativo tal como o representado na figura 10 e cuja posição depende de um ângulo  $\theta$ , teremos

$$F = - \frac{d E_{int}(\mathcal{R}(\theta), \phi)}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$$

Atendendo a que  $x=r\theta$  temos  $d\theta/dx=1/r$  e substituindo obtemos

$$T \equiv r F = - \frac{d E_{int}(\mathcal{R}(\theta), \phi)}{d\theta}$$

onde  $T$  é o torque ou binário, quantidade que substitui a força no contexto dos sistemas rotativos ( $[T]=Nm$ ). Em forma explícita escrevemos (utilizando a eq. (10))

$$T = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{H}}{d\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (12)$$

A equação acima sugere-nos a seguinte propriedade:

$$F = -\frac{d E_{int}(\mathcal{H}(\theta), \phi)}{d\theta} = \left( \frac{d E_{int}(L(\theta), i(\theta))}{d\theta} \right)_{i=constante} \quad (13)$$

A potência mecânica será dada por

$$P_{mec} = \omega T$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular de rotação:  $\omega=v/r$ .

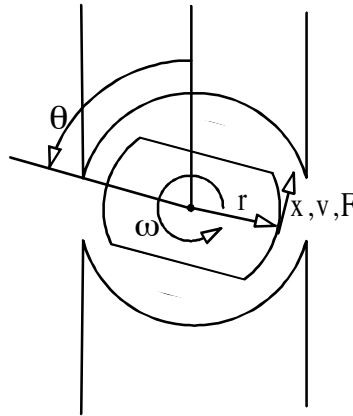


Figura 10- Definição de grandezas a utilizar no caso de sistemas rotativos.

## 1.5 Sistemas magnéticos com duas bobinas

Os sistemas magnéticos mais interessantes do ponto de vista tecnológico incluem a interação de duas ou mais bobinas que partilham um determinado circuito magnético. Apresentamos na figura 11 um exemplo genérico deste tipo de sistema magnético.

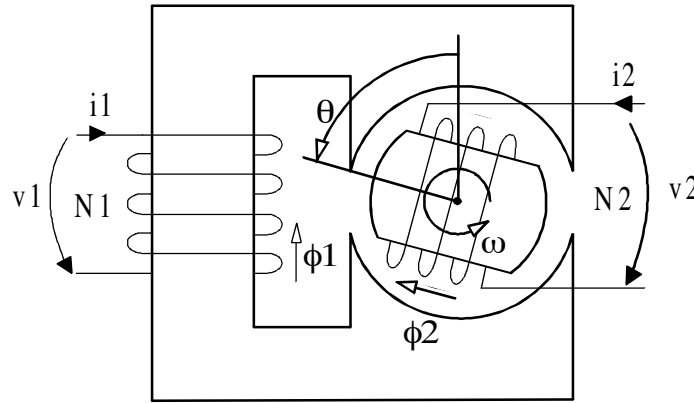


Figura 11- Sistema rotativo genérico com duas bobinas. A maior parte das máquinas magnéticas baseia-se neste princípio.

A parte rotativa chama-se rotor e a parte fixa chama-se estator.

### 1.5.1 O circuito magnético

A partir da análise da figura 11 reconhecemos um certo número de características neste circuito magnético:

- 1) A bobina 1 gera o fluxo  $\phi_1 = \mathcal{F}_1 / \mathcal{R}_1 = \mathcal{F}_1 / \Lambda_1$  e a bobina 2 gera o fluxo  $\phi_2 = \mathcal{F}_2 / \mathcal{R}_2 = \mathcal{F}_2 / \Lambda_2$  (ver eq. (1)).
- 2) O circuito magnético associado à bobina 1 tem relutância variável ( $\mathcal{R}_1(\theta)$ ) uma vez que a espessura de ar (chamado entreferro) que o fluxo que esta gera tem que atravessar depende de  $\theta$ .
- 3) Pela mesma razão o circuito magnético associado à bobina 2 também tem relutância variável ( $\mathcal{R}_2(\theta)$ ).
- 4) Em ambos os casos a relutância mínima corresponde a  $\theta=0$ , pois é neste caso que o entreferro é mínimo.
- 5) Em ambos os casos a relutância máxima corresponde a  $\theta=\pm 90^\circ$ , pois é neste caso que o entreferro é máximo.
- 6) Uma parte do fluxo gerado pela bobina 1 irá também circular pela bobina 2, correspondente ao  $\phi_{ext}$  que introduzimos na eq. (6). A este fluxo (o fluxo em 2 devido a 1) chamaremos  $\phi_{21}$ .
- 7) Uma parte do fluxo gerado pela bobina 2 irá também circular pela bobina 1, correspondente ao  $\phi_{ext}$  que introduzimos na eq. (6). A este fluxo (o fluxo em 1 devido a 2) chamaremos  $\phi_{12}$ .



- 8) Os fluxos  $\phi_{21}$  e  $\phi_{12}$  dependem de  $\theta$ , sendo nulos quando  $\theta=\pm 90^\circ$ , pois nesse caso as bobinas encontram-se cruzadas:  $\phi_{12}(\theta=\pm 90^\circ)=\phi_{21}(\theta=\pm 90^\circ)=0$ .
- 9) Quando  $\theta=180^\circ$  ou  $\theta=0^\circ$ , todo o fluxo gerado por 1 atravessa 2, e vice-versa. Atendendo à convenção de sinais teremos  $\phi_{12}(0^\circ)=\pm\phi_2$ ,  $\phi_{21}(0^\circ)=\pm\phi_1$ . O sinal + corresponde a  $\theta=180^\circ$  e o sinal - a  $\theta=0^\circ$ .
- 10) Existe uma relutância  $\mathcal{R}(\theta)=1/\Lambda(\theta)$  comum a ambos estes percursos:  $\phi_{12}(\theta)=\mathcal{I}_2\Lambda(\theta)$ ,  $\phi_{21}(\theta)=\mathcal{I}_1\Lambda(\theta)$ .
- 11) Quando  $\theta=180^\circ$  ou  $\theta=0^\circ$  teremos  $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_2=\pm\mathcal{R}$  ( $\Lambda_1=\Lambda_2=\pm\Lambda$ ). O sinal + corresponde a  $\theta=180^\circ$  e o sinal - a  $\theta=0^\circ$ .

Com base no que dissemos nos parágrafos 1) e 10) e com referência à eq. (6) podemos escrever

$$\phi_{T1} = \phi_1 + \phi_{12} = \phi_1 + \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}} \phi_2 \quad (14)$$

$$\phi_{T2} = \phi_2 + \phi_{21} = \phi_2 + \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}} \phi_1$$

Faremos agora as seguintes definições

$$L_1(\theta) \equiv N_1^2 \Lambda_1(\theta) \quad (15)$$

$$L_2(\theta) \equiv N_2^2 \Lambda_2(\theta)$$

$$M(\theta) \equiv N_1 N_2 \Lambda(\theta)$$

onde introduzimos a grandeza  $M$  chamada o coeficiente de indução mútua ( $[M]=H$ ), e que traduz o grau de influência mútua entre as duas bobinas. Como consequência do parágrafo 11), quando  $\theta=180^\circ$  ou  $\theta=0^\circ$  verifica-se a relação

$$L_2/r = rL_1 = \pm M$$

correspondendo o sinal + a  $\theta=180^\circ$  e o sinal - a  $\theta=0^\circ$ . Claro que se  $M$  é negativo  $\Lambda$  também o terá que ser. O sinal negativo quer dizer que a posição relativa das bobinas é tal que seus fluxos se subtraem.

A grandeza  $r \equiv N_2/N_1$  é chamada a relação de transformação.

Quando  $\theta=\pm 90^\circ$  temos  $M=0$ , como consequência do parágrafo 8).

Atendendo às definições acima e às eqs. (5) e (1) podemos escrever

$$\begin{aligned} v_1 &= N_1 \frac{d\phi_{T1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= N_2 \frac{d\phi_{T2}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (16)$$

Todas as grandezas são funções de  $\theta$  à exceção de  $N_1$  e  $N_2$ .

### 1.5.2 A energia magnética

Seguindo um raciocínio semelhante ao efectuado na secção 1.4.2 e atendendo à eq. (14) calculamos a energia eléctrica fornecida ao sistema no intervalo de tempo  $dt$  e convertida em energia potencial magnética (energia interna) como:

$$\begin{aligned} dE_{int} &= (i_1 v_1 + i_2 v_2) dt = \mathcal{R}_1 \phi_1 d\phi_{T1} + \mathcal{R}_2 \phi_2 d\phi_{T2} = \\ &\mathcal{R}_1 \phi_1 d\phi_1 + \mathcal{R}_1 \phi_1 \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}} d\phi_2 + \mathcal{R}_2 \phi_2 d\phi_2 + \mathcal{R}_2 \phi_2 \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}} d\phi_1 = \\ &\mathcal{R}_1 \phi_1 d\phi_1 + \mathcal{R}_2 \phi_2 d\phi_2 + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}} d\phi_1 \phi_2 \end{aligned}$$

onde utilizámos a igualdade matemática (regra da derivação do produto de funções)  $d\phi_1 \phi_2 / dt = \phi_2 d\phi_1 / dt + \phi_1 d\phi_2 / dt$ . Integrando obtemos a energia interna do sistema:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_1 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}_2 \phi_2^2 + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}} \phi_1 \phi_2 \quad (17)$$

As variáveis que definem o estado do sistema são as diversas relutâncias e os fluxos gerados por cada bobina. Podemos ainda escrever, atendendo às eqs. (15) e ao parágrafo 1):

$$E_{int} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

ou

$$E_{int} = \frac{1}{2} \Lambda_1 \mathfrak{F}_1^2 + \frac{1}{2} \Lambda_2 \mathfrak{F}_2^2 + \Lambda \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$$

expressão esta que é útil no contexto dos ímanes permanente.

### 1.5.3 As forças magnéticas

. Utilizando a eq. (13) concluímos que o torque será dado por

$$T = \left( \frac{dE_{int}}{d\theta} \right)_{i=constante}$$

que se explicita como

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta} \quad (18)$$

ou

$$T = \frac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2 \frac{d\Lambda_1}{d\theta} + \frac{1}{2} \mathfrak{F}_2^2 \frac{d\Lambda_2}{d\theta} + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \frac{d\Lambda}{d\theta}$$

As forças que se obtêm das primeiras parcelas destas equações chamam-se forças de relutância variável pois provêm da variação da relutância magnética do circuito. As forças provenientes da última parcela dependem da interacção entre os fluxos.

## 1.6 Sumário

Num circuito magnético com núcleo ferromagnético existem relações simples entre o fluxo magnético gerado pela bobina e a corrente que por ela passa.

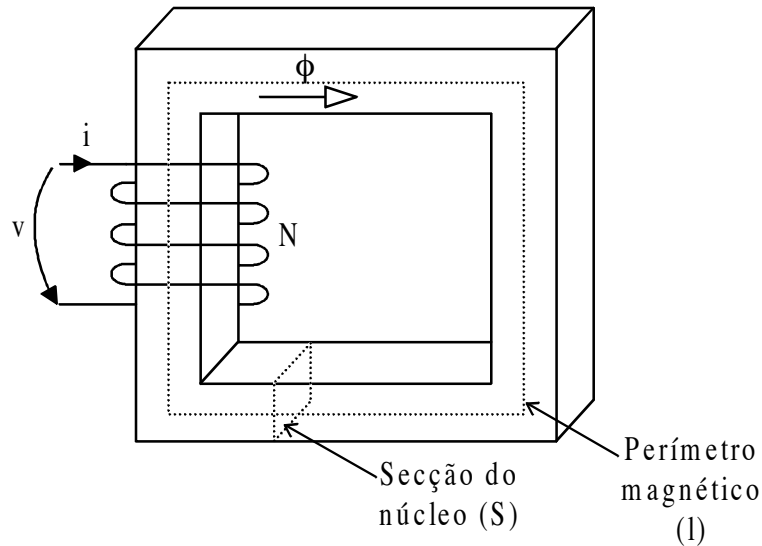


Figura 12- Exemplo de circuito magnético com definição das quantidades mais importantes: a bobina tem N espiras, é percorrida por uma corrente  $i$  e desenvolve aos terminais uma tensão  $v$ ; o núcleo tem secção  $S$ , perímetro médio  $l$  e é percorrido pelo fluxo magnético  $\phi$ .

$$N i = \mathcal{R} \phi \quad eq. (1)$$

onde  $\mathcal{R}$  é a chamada relutância magnética e tem como unidade o Henry inverso:  $[\mathcal{R}] = Ae/Wb = H^{-1}$ . A permeância magnética  $\Lambda \equiv 1/\mathcal{R}$  têm como unidade o Henry.

A relutância pode ser calculada como

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} \quad eq. (2)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo com valor  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ . e  $\mu_r$  descreve o material do núcleo. Designou-se por  $l$  o perímetro médio do circuito magnético percorrido pelo fluxo  $\phi$ .

Caso o circuito magnético seja constituído por vários segmentos em série com características distintas calcula-se a relutância de cada segmento e adicionam-se as relutâncias parciais para calcular a relutância total:

$$\mathcal{R} = \sum_j \mathcal{R}_j \quad (\text{circuito magnético série})$$

Define-se o coeficiente de auto-indução (ou indutância) de uma bobina como:

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad eq. (3)$$

sendo de notar que  $L$  depende apenas de factores geométricos.

O sistema magnético básico que serve de modelo à maior parte das aplicações é o seguinte

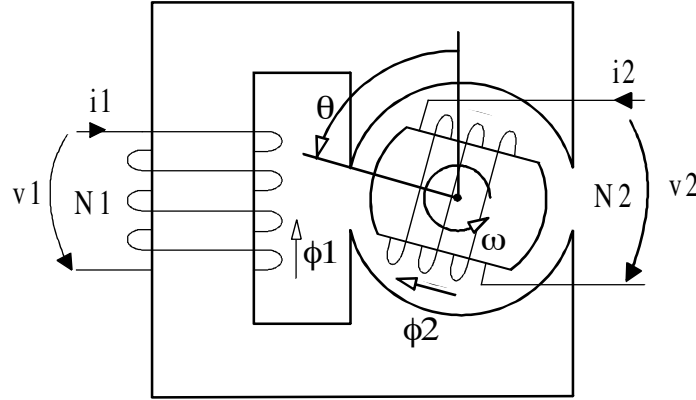


Figura 13- Sistema rotativo genérico com duas bobinas. A parte rotativa chama-se rotor e a parte fixa chama-se estator.

Neste sistema as tensões instantâneas aos terminais são dadas por

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad eq. (16)$$

e o torque fornecido ao rotor é dado por

$$T = \frac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2 \frac{d\Lambda_1}{d\theta} + \frac{1}{2} \mathfrak{F}_2^2 \frac{d\Lambda_2}{d\theta} + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \frac{d\Lambda}{d\theta}$$

ou por

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta} \quad eq. (18)$$

As grandezas

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &\equiv N_1^2 \Lambda_1(\theta) \\ L_2(\theta) &\equiv N_2^2 \Lambda_2(\theta) \\ M(\theta) &\equiv N_1 N_2 \Lambda(\theta) \end{aligned} \quad eq. (15)$$

são função de  $\theta$  e a forma exacta desta dependência depende dos detalhes construtivos de cada máquina. A grandeza  $M$  chama-se o coeficiente de indução mútua ( $[M]=H$ ), e traduz o grau de influência mútua entre as duas bobinas.

Quando  $\theta=180^\circ$  ou  $\theta=0^\circ$  verifica-se a relação

$$L_2 / r = r L_1 = \pm M$$

correspondendo o sinal + a  $\theta=180^\circ$  e o sinal - a  $\theta=0^\circ$ . Quando  $\theta=\pm 90^\circ$  temos  $M=0$ .

A grandeza

$$r \equiv N_2 / N_1$$

é chamada a relação de transformação.

No caso de sistemas lineares tal como o ilustrado na figura seguinte a força de atracção é dada por

$$F = - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad eq. (11)$$

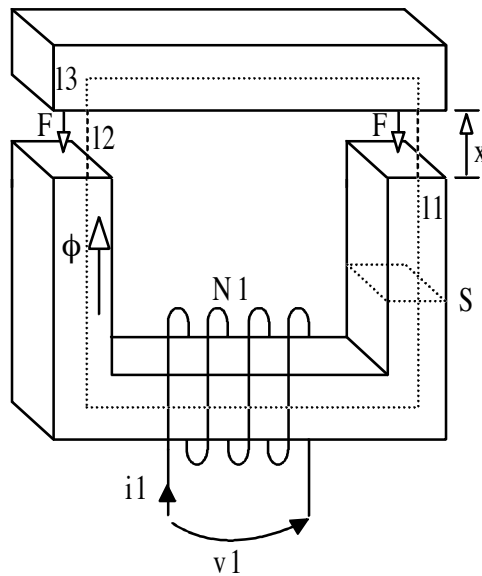


Figura 14- Exemplo de um sistema magnético que exerce uma força linear.

## 1.7 Aplicações

### 1.7.1 Transformadores

O transformador é uma máquina magnética sem partes móveis constituída do modo descrito na figura 15.

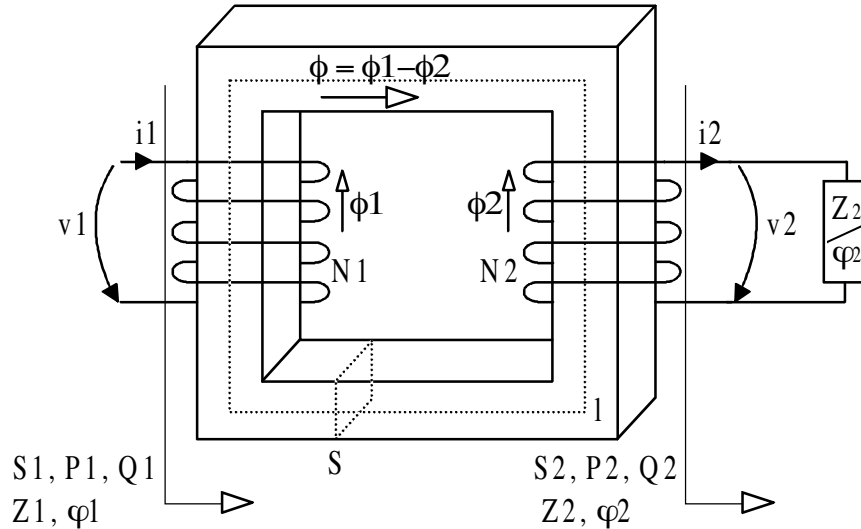


Figura 15- Constituição básica de um transformador com indicação das principais quantidades.

O enrolamento da esquerda ao qual o circuito exterior fornece as potências aparente, activa e reactiva  $S_1$ ,  $P_1$  e  $Q_1$  chama-se primário. O primário apresenta ao circuito exterior uma impedância  $Z_1$ . O enrolamento da direita, que se chama secundário, fornece ao circuito exterior, que tem impedância  $Z_2$ , as potências aparente, activa e reactiva  $S_2$ ,  $P_2$  e  $Q_2$ . Faz sentido estudar o transformador do ponto de vista da corrente alternada pois é esta a sua principal aplicação.

O transformador corresponde ao caso genérico estudado na secção 1.5 quando  $\theta=180^\circ$  e com inversão do sentido convencional da corrente secundária. Deste modo podemos utilizar directamente as equações já deduzidas, substituindo  $i_2$  por  $-i_2$ . Se considerarmos apenas o funcionamento em corrente alternada podemos escrever directamente as equações em termos das amplitudes da corrente e da tensão, substituindo a derivada da corrente  $di/dt$  por  $\omega I$ , tal como fizemos para os circuitos RLC.

Deste modo a amplitude da tensão aos terminais é dada por (eq. (16))

$$V_1 = \omega L_1 I_1 - \omega M I_2 \quad (19)$$

$$V_2 = \omega M I_1 - \omega L_2 I_2$$

onde

$$L_1 \equiv N_1^2 \Lambda, \quad L_2 \equiv N_2^2 \Lambda, \quad M \equiv N_1 N_2 \Lambda,$$

de modo que se verifica

$$L_2/r = rL_1 = M \quad (20)$$

sendo  $r \equiv N_2/N_1$  a razão de transformação. A permeância do circuito magnético ( $\Lambda$ ) calcula-se a partir da eq.(2).

Utilizando estas definições podemos modificar as eqs.(19) para obter o sistema equivalente

$$\begin{aligned} V_2 &= r V_1 \\ I_1 &= \frac{V_1}{\omega L_1} + r I_2 \equiv I_\mu + r I_2 \end{aligned} \quad (21)$$

A primeira equação diz-nos que a tensão no secundário é proporcional à tensão no primário, com um factor de proporcionalidade igual à razão de transformação. A segunda equação determina que a corrente no primário é proporcional à corrente no secundário com um factor de proporcionalidade igual à razão de transformação, mais a corrente de magnetização  $I_\mu = V_1/\omega L_1$  que é proporcional à tensão primária. É claro que em corrente contínua ( $\omega=0$ )  $V_1=0$  pois de outro modo a corrente de magnetização seria infinita: um transformador não funciona em C.C.

Com base nestas equações podemos construir um esquema equivalente ao transformador, representado na figura 16. O componente que aparece dentro do quadrado a tracejado é o símbolo esquemático correspondente ao transformador ideal, que obedece às seguintes relações:

$$V_2 = r V_1' \quad (\text{transformador ideal em C.A.}) \quad (22)$$

$$I_1' = r I_2$$

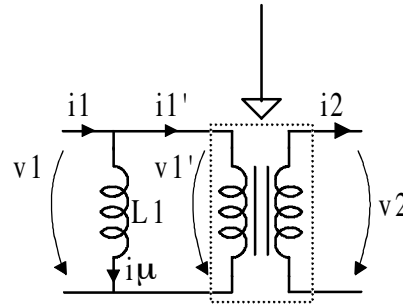


Figura 16- Esquema equivalente a um transformador real sem perdas. O componente que aparece dentro do quadrado a tracejado é o símbolo esquemático do transformador ideal

A indutância  $L_1$  corresponde à corrente de magnetização,  $i_\mu$ , que está sempre presente no transformador real, mesmo se a corrente no secundário é nula. De facto o fluxo magnético total no ferro é dado pela eq. (14), com  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ . Em amplitude teremos:

$$\Phi_{T1} = \Phi_{T2} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{L_1 I_1}{N_1} - \frac{L_2 I_2}{N_2} = \frac{L_1 I_\mu}{N_1} = \frac{V_1}{\omega N_1}$$

onde também utilizámos as eqs. (1), (20) e (21). Em C.A. o fluxo magnético num transformador é independente da corrente no secundário, e depende apenas da tensão primária, ou, o que é o mesmo, de  $I_\mu$ .



O transformador real apresenta algumas percas, que podem ser incorporadas no esquema equivalente (figura 17) através da introdução de mais alguns componentes. A resistência  $R_\mu$  representa percas de energia associadas à magnetização do ferro, nomeadamente as percas por histerese e as percas por correntes de Foucault. A resistência  $R_J$  representa as percas por efeito de Joule nos fios dos enrolamentos e a indutância  $L_d$  aparece devido ao o fluxo de dispersão. De facto existe uma pequena parte do fluxo  $\phi_I$  que não passa pela bobina 2 e vice-versa, quer dizer, na realidade  $\phi_{21} < \phi_I$  e  $\phi_{12} < \phi_2$ . Chama-se a este fluxo "perdido" o fluxo de dispersão. Em geral  $L_I \gg L_d$  e  $R_\mu \gg R_J$ .

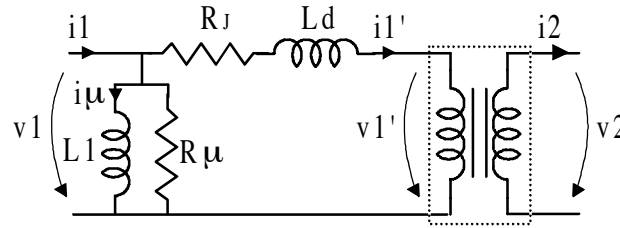


Figura 17- Esquema equivalente a um transformador real

O transformador ideal, descrito pelas eqs. (22), goza de algumas propriedades importantes. Consideremos o caso de um transformador ideal que alimenta uma carga genérica, com impedância  $Z_2$  e fase  $\varphi_2$ , tal como está representado na figura 18.

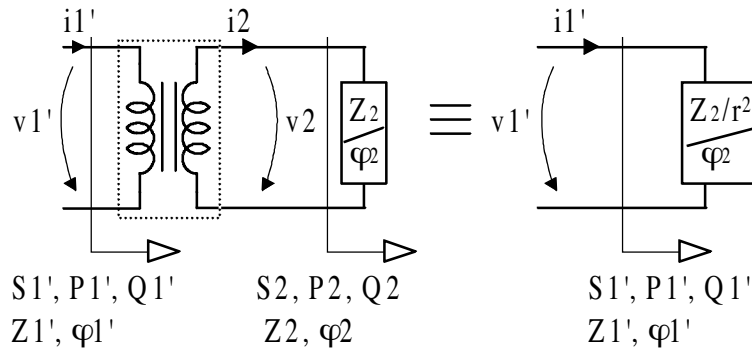


Figura 18- Esquema equivalente a um transformador ideal que alimenta uma impedância genérica.

Em relação à fase, uma vez que as eqs. (22) afectam separadamente a corrente e a tensão, a fase do lado primário deverá ser igual à fase do lado secundário. Em relação às amplitudes, se multiplicarmos e dividirmos ambas as eqs. (22) obtemos

$$V_1' I_1' = V_2 I_2$$

$$\frac{V_1'}{I_1'} = \frac{1}{r^2} \frac{V_2}{I_2}$$

relações que se podem rescrever como

$V_1' = r V_2, \quad I_1' = r I_2$ $S_1' = S_2, \quad P_1' = P_2, \quad Q_1' = Q_2$ $Z_1' = \frac{Z_2}{r^2}, \quad \varphi_1' = \varphi_2$	(sumário transformador ideal)
--	-------------------------------

Concluimos que num transformador ideal a potência consumida pelo primário é igual à potência fornecida à carga pelo secundário. Do ponto de vista do primário a carga é equivalente a uma impedância  $Z_1' = Z_2/r^2$ , não se alterando a fase  $\varphi_1' = \varphi_2$ . O conjunto transformador-carga é equivalente a uma única impedância, tal como está ilustrado na figura 18. A esta operação chama-se "referir a carga ao primário".

Sistemas magnéticos simples

Bussola

atração e repulsão entre imanes

atração de ferro por imanes

Dispositivos de gravação magnética

Relés e disjuntores

disj. diferencial

solenóide de sucção

Motores passo-a-passo

iman permanente

relutância variável

O motor síncrono/alternador

O motor de corrente contínua/dínamo

O travão electromagnético

O motor de indução

Altifalantes e microfones

Instrumentos de medida: galvanómetro Watímetro (mercury)