

Dinâmica das Máquinas Eléctricas

Gil Marques

Abril 2002

Prefácio

Este texto resultou de um esforço feito ao longo de vários anos na leccionação de algumas disciplinas de Máquinas Eléctricas do IST.

Pode este texto ser dividido em duas partes. Na primeira, que corresponde aos quatro primeiros capítulos, trata-se o problema da obtenção de modelos matemáticos para a descrição da dinâmica das Máquinas Eléctricas em particular e dos sistemas electromecânicos em geral. Na segunda parte, estes modelos são utilizados para a obtenção das respostas dinâmicas dos sistemas em várias situações.

Os leitores que aceitarem enviar-me as suas críticas e sugestões terão desde já o meu agradecimento.

Abril de 2002

Índice

Prefácio.....	ii
Índice	iii
Capítulo 1	1
Princípios de Conversão Electromecânica de Energia.....	1
1.1. Introdução	1
1.2. Princípio da Conservação de Energia	2
1.3. Expressões da força mecânica e energia	5
Máquinas em "translação" e em "rotação"	5
Expressões da força electromagnética em função da energia	7
Exemplo 1.1	8
Exemplo 1.2	10
Expressões de binário em função da co-energia magnética	10
Exemplo 1.3	12
Expressões do binário electromagnético.....	12
1.4. Expressões simplificadas (circuitos lineares).....	13
Balanço Energético:	15
Exemplo 1.4	15
1.5. Sistemas de campo magnético de excitação múltipla.....	16
Exemplo 1.5	18
1.6. Caso do circuito magnético linear.	19
1.7. Aplicação ao caso de circuitos magnéticos com ímanes permanentes. 21	
Classificação dos dispositivos electromecânicos consoante o uso de	
íman permanente	22
Anexo 1: Expressões matemáticas para a energia magnética	24
Caso do circuito magnético linear.....	25
Exercícios de Revisão.....	27
Capítulo 2	31
Sensores e Actuadores Electromecânicos	31
2.1 - Sistemas de relutância	31
Modelo Matemático	31
Propriedades gerais dos sistemas relutantes.....	32

Exemplos	32
Exemplo 1: Electroímans	32
A - Núcleo em forma de U	33
B - Electroímans em forma de E	33
C - Electroímans cilíndricos	34
D. Electroímans de duplo efeito e reversíveis	34
Influência da forma do circuito magnético	35
Exemplo 2: Relés	35
Exemplo 3: Contactores	35
Exemplo 4: Electroválvulas	36
Exemplo 5: Motor oscilante relutante	36
Exemplo 6: Motores passo-a-passo	37
Análise de um motor de relutância rotativo, alimentado em corrente alternada	38
A - Cálculo do binário a partir da relutância	38
B - Sistema de relutância alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal	39
C - Cálculo do binário a partir da indutância	41
Alimentação com corrente contínua	42
Alimentação com uma fonte de corrente alternada	42
2.2. Sistemas Electrodinâmicos	43
Generalidades	43
Equações	43
Propriedades gerais	44
Exemplo 7: Altifalante	44
Princípio e características	44
O Transdutor do altifalante	45
Exemplo 8: Aparelhos de medida de quadro móvel	45
Exemplo 9: Traçador	46
2.3. Sistemas Electromagnéticos	47
Generalidades	47
Propriedades gerais	47
Exemplo 10: Motores passo a passo polifásicos	48
Exemplo 11: Motores passo-a-passo monofásicos	48
Exemplo 12: Captadores	49
2.4. Sistemas Relutantes Polarizados ou Híbridos	50
Generalidades	50

Propriedades gerais	50
Comportamento	50
Estruturas possíveis.....	51
Íman fixo	51
Íman móvel	52
Exemplo 13: Electroímans polarizados.....	52
Exemplo 14: Motores oscilantes	52
Exemplo 15: Motores de binário	53
2.5. Sistemas Electrostáticos.....	54
Generalidades.....	54
Equações	54
Propriedades gerais	55
Exemplo 16: Voltímetro Electrostático.....	56
Exemplo 17: Motor passo-a-passo electrostático.....	56
Exemplo 18: Sensores electrostáticos	56
Exercícios de Revisão:.....	58
Capítulo 3	63
Modelos Dinâmicos das Máquinas Eléctricas de Corrente Alternada	63
3.1 Introdução	63
3.2 Coeficientes de indução das Máquinas Eléctricas	64
A - Máquina Assíncrona	64
Coeficientes de auto-indução	64
Coeficientes de indução mútua entre enrolamentos do mesmo lado.....	64
Coeficientes de indução mútua entre enrolamentos do estator e enrolamentos do rotor.	65
Modelo da máquina de indução em grandezas abc	67
B - Máquina Síncrona de pólos salientes.....	68
Indutâncias próprias	69
Indutância mútua, estator-estator	70
Indutâncias mútuas entre o estator e o rotor.....	71
Modelo das Máquinas Síncronas.....	72
3.3 Transformações de variáveis	73
Introdução	73
Condição de invariância de potência.....	74
Transformação da expressão do binário	75

Caso das transformações cujas matrizes não variam no tempo	75
Exemplo 3.1 “Aplicação da matriz de conexão de Kron no cálculo de um circuito eléctrico”	76
Aplicação de uma transformação com matrizes diferentes ao estator e ao rotor	78
Classificação das principais transformações	79
3.4 Transformação de um sistema trifásico num sistema bifásico equivalente. Transformação de Concordia.....	81
Definição da transformação	81
Exemplo 3.2 "Transformação de Concordia das tensões em regime equilibrado".	84
Interpretação geométrica da transformação de Concordia.....	87
Resumo das propriedades da transformação de Concordia.....	89
3.5 Aplicação da transformação de Concordia à Máquina de Indução.....	91
Transformação dos coeficientes de indução do estator de uma máquina de pólos lisos	91
Transformação da matriz dos coeficientes de indução mútua entre o estator e o rotor da máquina de indução.....	92
Modelo matemático da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta$	93
3.6 Máquina Síncrona de pólos salientes em coordenadas $\alpha\beta$.....	97
Exemplo 3.3 Obtenção da matriz dos coeficientes de indução da máquina síncrona de pólos salientes por inspecção.	99
3.7 Transformação de “Rotação de Referencial”.....	102
A. Definição	102
Exemplo 3.4 Composição da transformação de Concordia e da Transformação de rotação de referencial - Transformação de Blondel-Park.	103
B. Transformação de um modelo de uma máquina em coordenadas α, β para coordenadas d,q.	104
Expressões do binário	106

Exemplo 3.5 - "Aplicação da transformação de Park a um sistema equilibrado de tensões ou correntes".....	106
3.8. Modelo da Máquina de indução em coordenadas de Blondel-Park..	110
Introdução	110
Exemplo 3. 6 “ Modelo da máquina de indução no referencial do estator”	111
Exemplo 3.7 “Transformação de frequências”	112
3.9. Aplicação da transformação de Park à Máquina Síncrona de pólos salientes.	114
Exemplo 3.8 Obtenção do modelo da máquina Síncrona através dos produtos matriciais.	114
Esquema Equivalente da Máquina Síncrona.....	117
Máquina Síncrona com enrolamentos amortecedores	118
3.10. Introdução da notação complexa.....	120
A. Introdução:	120
B. Componentes simétricas instantâneas	123
Exemplo 3.9 Aplicação da transformação de componentes simétricas instantâneas a vários sistemas de tensão.....	124
Modelo da máquina de indução em componentes simétricas	127
C. Transformação Complexa Rotativa (fb).....	129
C1. Definição	129
C2. Definição a partir das componentes dq.....	129
C3. Definição a partir das componentes +/-	129
C4. Relação entre as componentes simétricas e as variáveis de fase abc.	130
Exemplo 3. 10 “ Aplicação da transformação fb a sistemas de tensão. ($p = \omega t$).....	130
C5. Modelo da Máquina de indução em coordenadas fb	132
C.6 Modelo da máquina de indução num referencial do estator ($+ - fb$)	132
C.8. Modelo da máquina de indução num referencial do campo girante (fb, fb):	133
Exemplo 3.11 “Esquema equivalente da máquina de indução em regime sinusoidal equilibrado”	133

Exemplo 3.12 “Esquema equivalente da máquina de indução em regime sinusoidal desequilibrado com componentes homopolares nulas”	133
Vectores espaciais.	136
3. 11. Transformação de dois eixos standard.	139
3.12 Vectores espaciais.....	142
1. Definição.....	142
2. Interpretação geométrica.....	142
3. Rotação de referencial.....	143
4. Modelo de máquina de indução utilizando vectores espaciais.	144
Exemplo 3.13 Modelo de máquina de indução no referencial do estator e no referencial genérico.	145
Esquema equivalente da máquina de indução:.....	146
Anexo 1: “ Visualização dos coeficientes de indução de uma máquina eléctrica”.	148
Anexo 2: “Aplicação da Transformação de Concordia à Máquina Síncrona”	149
1. Cálculo do termo $C^T L_{ee} C$	149
2. Coeficiente de indução mútua entre estator e rotor.	152
Cálculo de $C^T M_{ef}$	152
Exercícios de revisão.....	152
Máquina assíncrona monofásica	154
Capítulo 4	159
Modelização de sistemas electromecânicos com comutação	159
4.1. Modelização da Máquina de Corrente Contínua com pólos de comutação e enrolamentos de compensação	160
Obtenção do modelo da máquina de corrente contínua	163
4.2. Modelização da geratriz de rectificação.....	170
Modelo da Geratriz de Rectificação.....	172
Exercícios de Revisão:	179
Bibliografia:	182
Capítulo 5	183
Regimes transitórios das Máquinas de Corrente Contínua.....	183
5.1 Introdução	183
5.2 A máquina de corrente contínua ideal.....	184

Modelo dinâmico da máquina de corrente contínua	185
Funções de transferência. Resposta no tempo.	186
5.3 Motor de corrente contínua de excitação independente.....	186
Estudo do polinómio característico. Determinação dos pólos do sistema.....	189
Exemplo 5.1	190
Transitório de arranque directo com binário de carga proporcional à velocidade.....	192
Exemplo N° 5.2.....	193
Conclusões	194
Transitório resultante da aplicação de um escalão de binário.....	195
Exemplo N° 5.3	196
Conclusões acerca da aplicação de escalão de binário	197
5.4 Estudo da máquina de corrente contínua de excitação série	199
Introdução	199
Modelo Matemático	199
Exemplo N° 5.4.....	202
Linearização do modelo de estado do motor de corrente contínua de excitação em série.	202
Determinação dos pólos do modelo linearizado.	204
Exercícios	205
ANEXO	208
Resposta ao escalão de sistemas de segunda ordem	208
Capítulo 6	213
Estudo dos transformadores em regime transitório.....	213
6.1 Transformador monofásico de dois enrolamentos.....	213
Modelo matemático	213
Determinação de expressões analíticas aproximadas para os pólos.....	215
Interpretação.....	216
Exemplo 6.1	217
Funções de transferência.....	218
Mapas de pólos e zeros	219
Transformador em vazio	220
Exemplo 6.2	221
Resolução.....	221
Arranque do transformador em vazio. Saturação magnética	221

Transformador em curto-circuito	224
Exemplo 6.3	226
Transformador de intensidade de corrente	227
6.2 Transformador monofásico de 3 enrolamentos.	229
Equações	229
Esquema equivalente simplificado	231
Reactância Operacional de um transformador monofásico de 3 enrolamentos	232
Expressões aproximadas para as indutâncias operacionais desprezando as resistências.	235
6.3 Transformador trifásico de 3 colunas	236
Constituição	236
Modelo matemático	236
Transformador trifásico de núcleo magnético simétrico.....	236
Banco de três transformadores monofásicos.....	237
Aplicação da transformação de Concordia ao transformador trifásico de núcleo magnético simétrico.	237
Exercícios	239
Anexo A6. Simulação do transformador em vazio considerando a saturação magnética.	240
Capítulo 7	241
Regimes transitórios das Máquinas Síncronas	241
7.1 Introdução	241
7.2 Modelo das Máquinas Síncronas com enrolamentos de excitação e enrolamentos amortecedores.....	242
Modelo da máquina em valores por unidade	245
Impedâncias operacionais	245
Constantes de tempo da máquina síncrona:	249
Longitudinais.....	249
Transversais.....	249
Admitâncias operacionais	252
Diagramas de Bode e de Nyquist.	254
7.3 Curto-circuito trifásico simétrico e equilibrado a partir do vazio	258
Condições iniciais	258
Equações operacionais	259
Solução das equações:.....	260
Cálculo das correntes	260

Cálculo dos fluxos.....	265
Cálculo do Binário	267
Corrente de excitação	269
Interpretação de resultados.....	272
Componentes de frequência fundamental, contínuas em dq	272
Componentes de frequência zero ou dupla da fundamental, frequência fundamental em dq	274
7.4 Transitório de aplicação de carga à Máquina síncrona	278
Exercícios	283
Anexo A: Programa de simulação “SindqfDQ”	285
Anexo B: Tabela de transformadas de Laplace utilizadas	287
Bibliografia.....	288
Livros	288

Capítulo 1

Princípios de Conversão Electromecânica de Energia

1.1. Introdução

Com este capítulo inicia-se o estudo das máquinas eléctricas e outros dispositivos electromecânicos através da teoria dos circuitos.

Nesta teoria as máquinas são vistas como circuitos eléctricos ligados magneticamente para o caso de sistemas magnéticos, ou electricamente para o caso dos sistemas electrostáticos. Os coeficientes de auto-indução e de indução mútua, (ou os coeficientes de capacidade), são funções de uma ou mais variáveis.

O processo da conversão electromecânica de energia realiza-se através do campo eléctrico ou magnético de um dispositivo de conversão.

Embora os vários dispositivos de conversão funcionem baseados em princípios similares, as estruturas dos dispositivos dependem da sua função.

Os *transdutores* são dispositivos que se empregam na medição e controlo. Normalmente funcionam em condições lineares, saída proporcional à entrada, e com sinais relativamente pequenos. Entre os muitos exemplos referem-se microfones, taquímetros, acelerómetros, sensores de temperatura, de pressão etc.

Os *actuadores* são dispositivos que produzem força. Como exemplos têm-se os relés, electroímans, motores passo-a-passo etc.

A terceira categoria de dispositivos inclui equipamentos de *conversão contínua de energia*, tais como motores e geradores.

Enquanto que no dimensionamento dos transdutores e actuadores, a preocupação principal é a fidelidade, neste terceiro grupo a preocupação principal é o rendimento. Isto compreende-se pela natureza diferente da sua aplicação. Em princípio os dispositivos são reversíveis, isto é, os actuadores podem funcionar como actuadores ou transdutores e os motores como motores ou geradores. Contudo, deve referir-se que nas aplicações raramente esta reversibilidade é utilizada.

Os objectivos que se pretendem atingir com este capítulo são:

- Ajudar na compreensão de como ocorre a conversão electromecânica de energia.
- Mostrar como desenvolver modelos dinâmicos para os conversores electromecânicos com os quais possa ser calculado o seu desempenho.

O conceito fundamental para a análise dos conversores electromecânicos é o *campo de acoplamento*. Este campo corresponde ao campo magnético na maioria dos dispositivos. Contudo existem alguns dispositivos baseados no campo eléctrico.

A partir das funções energia ou co-energia deduzem-se as variáveis de estado do sistema e a força ou binário de origem electromecânica.

1.2. Princípio da Conservação de Energia

O princípio da conservação de energia afirma que esta não é criada nem destruída, apenas muda de forma. Este princípio constitui uma ferramenta conveniente para determinar as características do acoplamento electromecânico. É também necessário ter em atenção as leis do campo eléctrico e magnético, as leis dos circuitos eléctricos e magnéticos, e a mecânica newtoniana.

Como as frequências e velocidades são relativamente baixas comparadas com a velocidade da luz, pode admitir-se a presença de regimes em que o *campo é quase estacionário*, sendo a radiação electromagnética desprezável. Assim, a conversão electromecânica de energia envolve energia em quatro formas e o princípio de conservação de energia leva à seguinte relação entre essas formas:

$$\begin{pmatrix} \text{Entrada de} \\ \text{Energia} \\ \text{Eléctrica} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Saída de} \\ \text{Energia} \\ \text{Mecânica} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Convertida} \\ \text{em Calor} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

A equação 1.1 é aplicável a todos os dispositivos de conversão. Está escrita na convenção motor. Nesta convenção todas as parcelas têm valores positivos em funcionamento motor. Em funcionamento gerador esta equação continua a ter validade, mas as parcelas referentes à energia eléctrica e mecânica tomam valores negativos. Para o estudo deste tipo de funcionamento (gerador), é mais fácil utilizar a mesma expressão, mas escrita na convenção gerador, eq.1.2.

$$\begin{pmatrix} \text{Entrada de} \\ \text{Energia} \\ \text{Mecânica} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Saída de} \\ \text{Energia} \\ \text{Eléctrica} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Convertida} \\ \text{em Calor} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Neste texto adopta-se a convenção motor.

A conversão irreversível de energia em calor tem três causas:

1. Perdas por efeito de Joule nas resistências dos enrolamentos que constituem parte dos dispositivos. Estas perdas são frequentemente chamadas de **perdas no cobre**.
2. Parte da potência mecânica desenvolvida pelo dispositivo é absorvida no atrito e ventilação e então convertida em calor. Estas perdas são chamadas de **perdas mecânicas**.
3. Perdas magnéticas (em dispositivos magnéticos) ou dieléctricas (em dispositivos eléctricos). Estas **perdas** estão associadas ao **campo de acoplamento**.

Além destes tipos de perdas deve-se, em estudos mais aprofundados, considerar também perdas *suplementares* que têm várias causas.

Nos dispositivos magnéticos, que são de longe as mais frequentes, as perdas magnéticas são devidas a correntes de Foucault e à histerese magnética.

Na teoria que se segue são desprezadas as perdas magnética e as perdas dieléctricas.

As equações 1.1 e 1.2 podem ser escritas na forma da equação 1.3 onde se admite a convenção motor.

$$\begin{pmatrix} \text{Entrada de} \\ \text{Energia Eléctrica} \\ \text{menos perdas} \\ \text{Eléctricas} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Saída de} \\ \text{Energia Mecânica} \\ \text{mais perdas} \\ \text{Mecânicas} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

O primeiro membro da equação 1.3 pode ser expresso em termos das correntes e tensões nos circuitos eléctricos do dispositivo de acoplamento.

Considere-se o esquema geral de um dispositivo de conversão mostrado na figura 1.1.

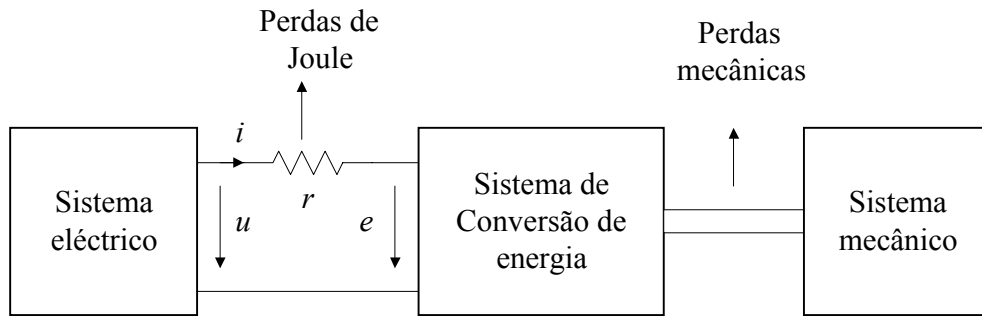


Fig. 1.1. Representação geral da conversão electromecânica de energia.

Pode escrever-se:

$u i dt \rightarrow$ diferencial de energia de entrada da parte eléctrica

$r i^2 dt \rightarrow$ diferencial de energia de perdas de Joule

$dW_{ele} = u i dt - i^2 r dt = (u - r i) i dt = e i dt$ Diferencial de energia eléctrica

líquida de entrada no dispositivo de acoplamento.

Para que o dispositivo de acoplamento possa absorver energia do circuito eléctrico, o campo de acoplamento deve produzir uma reacção sobre o circuito. Esta reacção é a força electromotriz indicada pela tensão e na figura 1.1. A reacção sobre a entrada é uma parte essencial do processo de transferência de energia entre um circuito eléctrico e outro meio qualquer.

Da discussão precedente, deverá ser evidente que as resistências dos circuitos eléctricos e o atrito e ventilação do sistema mecânico, embora sempre presentes, não representam partes importantes no processo de conversão de energia. Este processo envolve o campo de acoplamento e sua acção e reacção nos sistemas eléctrico e mecânico.

A equação 1.3 pode pôr-se na forma diferencial:

$$dW_{ele} = dW_{campo} + dW_{mec} \quad (1.4)$$

onde

dW_{ele} - diferencial de energia recebida pelo campo de acoplamento

dW_{campo} - diferencial de energia do campo de acoplamento

dW_{mec} - diferencial de energia convertida em mecânica

Para a análise completa dum dispositivo electromecânico, além da equação (1.4) que traduz o princípio de conversão de energia (bloco central da figura 1.1), deverá ter-se em conta as equações que traduzem a interligação ao sistema eléctrico e as equações que o interligam ao sistema mecânico. A interligação ao sistema eléctrico pode ser feita por uma ou mais vias, correspondendo a cada uma delas uma equação diferencial. A interligação ao sistema mecânico é na maioria dos casos feita através de uma única via (apenas um grau de liberdade) correspondendo a esta interligação apenas uma variável. Esta interligação é traduzida pela 2ª lei de Newton.

Quando o dispositivo for de natureza magnética, as equações que traduzem a interligação eléctrica são deduzidas da lei de Faraday. No caso de dispositivos electrostáticos estas equações são deduzidas da lei da conservação da carga. Resumindo tem-se:

Para a análise de um dispositivo electromecânico de natureza magnética deverá ter-se como base:

- Equação 1.4
- 2ª lei de Newton
- Lei de Faraday

Por sua vez, a análise de um dispositivo electromecânico de natureza eléctrica deverá ter como base:

- Equação 1.4
- 2ª lei de Newton
- Lei da conservação da carga

1.3. Expressões da força mecânica e energia

Máquinas em "translação" e em "rotação"

As figuras 1.2 e 1.3 representam dispositivos electromecânicos. O primeiro é de translação e o segundo de rotação.

Na figura 1.2, a energia magnética depende das grandezas eléctricas e da posição da peça móvel x . A energia magnética W_m armazenada na carcaça é uma função do fluxo ψ , criado pela corrente i , e da relutância R do circuito que por sua vez também é função da posição x da armadura. Assim a energia magnética é função de 2 quantidades.

$$W_m = f(\psi, x) \quad (1.5)$$

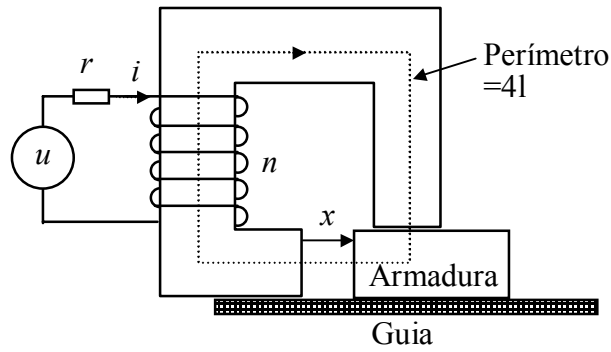


Fig. 1.2. Relé Electromecânico.

Ver-se-á que a força electromecânica F_{em} , que se exerce sobre a armadura tem uma expressão simples em função desta energia.

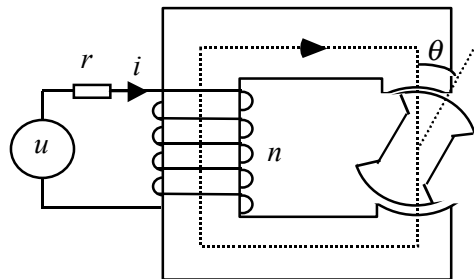


Fig. 1.3. Conversor electromecânico elementar de rotação.

Na figura 1.3, tem-se o mesmo princípio. A única diferença está no parâmetro geométrico que define a posição do rotor, que é agora o ângulo θ e que as variações de energia magnética armazenada no circuito produzem agora um binário electromagnético M_{em} . Também aqui se encontrará uma expressão fácil para o binário em função da energia magnética.

Expressões da força electromagnética em função da energia

Considere-se o caso elementar da figura 1.2. Considerando as perdas de Joule concentradas na resistência r , tem-se:

$$e = \frac{d\psi}{dt}$$

A energia eléctrica elementar fornecida pela fonte ao campo, vale:

$$dW_{ele} = e i dt = i d\psi$$

Se a peça móvel se deslocar uma distância dx , o diferencial de energia mecânica consumido vale:

$$dW_{mec} = F_{em} dx$$

Nestas condições a expressão que traduz o princípio da conservação de energia 1.4 toma a forma:

$$i d\psi = F_{em} dx + dW_m \quad (1.6)$$

O diferencial da função energia magnética escreve-se, na forma geral

$$dW_m(\psi, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} dx \quad (1.7)$$

Introduzindo a equação (1.7) na equação (1.6) tem-se:

$$i d\psi = F_{em} dx + \frac{\partial W_m}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} dx \quad (1.8)$$

ou

$$\left(\frac{\partial W_m}{\partial \psi} - i \right) d\psi + \left(F_{em} + \frac{\partial W_m}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (1.9)$$

As variáveis ψ e x são variáveis independentes. Assim podem variar independentemente uma da outra. Como consequência, para que a igualdade 1.9 seja sempre verdadeira é necessário que as funções que multiplicam $d\psi$ e dx sejam sempre nulas. Tem-se:

$$i = \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi} \quad (1.10)$$

$$F_{em} = - \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x} \quad (1.11)$$

A expressão (1.11) traduz a força como sendo a derivada parcial da função energia magnética em função da posição. Esta função energia magnética é uma função de estado e deverá estar escrita em termos do fluxo ligado ψ e da coordenada de posição x . As equações 1.10 e 1.11 são as chamadas *equações paramétricas*.

Exemplo 1.1

O dispositivo representado na figura 1.2 tem um comprimento da linha média do seu circuito magnético $4l$ de 40 cm, uma secção de $30/\pi \text{ cm}^2$, 200 espiras. Considere a permeabilidade magnética relativa do ferro de $\mu_{r_{fe}}=500$.

Determine:

1. A expressão da energia magnética armazenada no dispositivo. Considere o circuito magnético do ferro linear.
2. O valor da força e o seu sentido em função da coordenada de posição x .
3. Verifique a aproximação de linearidade do circuito magnético sabendo que o ferro utilizado pode considerar-se linear para valores de indução magnética inferiores a 1.5T. Determine o valor da corrente i de modo a que a aproximação de linearidade do circuito magnético se mantenha verdadeira.

Resolução:

1. Expressão da energia magnética

- a) Cálculo da relutância magnética

- a.1 Relativa ao ar

$$R_{mar} = \frac{x}{\mu_o S}$$

- a.2 Relutância magnética relativa ao ferro

$$R_{mfe} = \frac{4l - x}{\mu_r \mu_o S}$$

- a.3 Relutância magnética total

$$R_m = \frac{1}{\mu_o S} \left(x + \frac{4l}{\mu_r} - \frac{x}{\mu_r} \right) \approx \frac{1}{\mu_o S} \left(x + \frac{4l}{\mu_r} \right)$$

- b) Expressão da energia magnética armazenada

$$w_m = \frac{1}{2} i \psi = \frac{1}{2} F_{mm} \phi = \frac{1}{2} R_m \phi^2 = \frac{1}{2} R_m \frac{\psi^2}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} = \frac{1}{2} L i^2$$

Para a aplicação da equação 1.11, a expressão da energia magnética deverá ser função de x e ψ , ou seja, a expressão $\frac{1}{2}Li^2$ não é a expressão utilizável. Em vez disso utilizaremos as expressões que se seguem.

$$W_m = \frac{1}{2} R_m \phi^2 = \frac{1}{2} R_m \frac{\psi^2}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L}$$

2. Cálculo da força

$$F_{em} = - \frac{\partial W_m}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{n^2} \frac{\partial R_m}{\partial x} \bullet - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{n^2} \frac{1}{\mu_0 S}$$

A força será sempre uma força de atracção pois é sempre negativa e, no referencial adoptado, as forças negativas têm o significado de forças de atracção. É também proporcional ao quadrado do fluxo. Esta força será de amplitude constante se o fluxo ψ se mantiver constante.

Se o dispositivo for alimentado por uma fonte de corrente de intensidade i , ter-se-á:

$$F_{mm} = ni$$

e então

$$\phi = \frac{ni}{R_m} \quad ; \quad \psi = \frac{n^2 i}{R_m}$$

donde

$$F_{em} = - \frac{1}{2} \frac{n^2 i^2}{R_m^2} \frac{1}{\mu_0 S}$$

3. Para um campo de indução magnética inferior a 1.5T correspondente um fluxo ϕ inferior a:

$$\phi = S B$$

Como

$$ni = \phi R_m \approx B \frac{1}{\mu_0} \left(x + \frac{4l}{\mu_r} \right)$$

Podemos concluir que para que o campo B seja constante e igual a $B=1.5T$, a corrente i que deverá circular será tanto maior quanto maior for o entreferro. A menor corrente obtém-se quando $x=0$.

Introduzindo os valores do enunciado do problema, tem-se:

$$ni = \frac{1.5}{4\pi 10^{-7}} \left(\frac{40 \cdot 10^{-2}}{500} \right) = 954.9 \text{ Ae}$$

ou

$$i < 4.77 \text{ A}$$

Exemplo 1.2

Um transdutor rotativo com apenas um circuito de excitação semelhante ao da figura 1.3, tem uma relação não linear entre o fluxo ligado ψ , a corrente i , e a posição θ , que pode ser expressa por:

$$i = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \psi^{1.6}$$

Determine a expressão do binário em função de θ .

Resolução:

$$W_m = \int_0^\psi i d\psi = \int_0^\psi \psi^{1.6} (A_0 - A_1 \cos 2\theta) d\psi$$

$$W_m = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \int_0^\psi \psi^{1.6} d\psi$$

$$W_m = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \frac{\psi^{2.6}}{2.6}$$

$$M_{em} = -\frac{\partial W_m}{\partial \theta} = -2A_1 \sin 2\theta \frac{\psi^{2.6}}{2.6}$$

Expressões de binário em função da co-energia magnética

Se se definir a função co-energia magnética (fig 1.4) como:

$$W'_m(i, x) = \int_0^i \psi(i, x) di \quad (1.12)$$

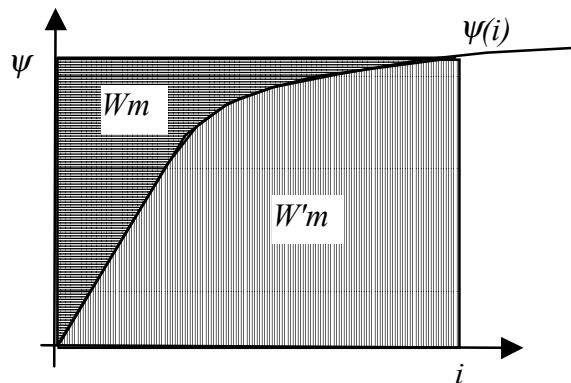


Fig. 1.4. Definição de energia e coenergia magnética.

Tem-se

$$W_m + W'_m = \psi i \quad (1.13)$$

donde

$$dW_m = -dW'_m + i d\psi + \psi di \quad (1.14)$$

introduzindo na expressão (1.6) obtém-se:

$$i d\psi = F_{em} dx - dW'_m + i d\psi + \psi di \quad (1.15)$$

como

$$dW'_m(i, x) = \frac{\partial W'_m}{\partial i} di + \frac{\partial W'_m}{\partial x} dx \quad (1.16)$$

tem-se

$$0 = F_{em} dx - \frac{\partial W'_m}{\partial i} di - \frac{\partial W'_m}{\partial x} dx + \psi di \quad (1.17)$$

ou

$$\left(F_{em} - \frac{\partial W'_m}{\partial x} \right) dx + \left(\psi - \frac{\partial W'_m}{\partial i} \right) di = 0 \quad (1.18)$$

Atendendo à independência das variáveis x e i e fazendo um raciocínio semelhante ao que fizemos da expressão equivalente em função da energia, tem-se:

$$F_{em} = \frac{\partial W'_m}{\partial x} \quad (1.19)$$

$$\psi = \frac{\partial W'_m}{\partial i} \quad (1.20)$$

Obtém-se assim uma outra expressão para a força que se exerce sobre a armadura, igual à derivada parcial em relação a x da função co-energia magnética. As expressões (1.11) e (1.19) são equivalentes e válidas em todos os casos. Pode utilizar-se indiferentemente uma ou outra conforme o caso em que se escolha como variáveis independentes ψ e x ou i e x . A função co-energia magnética é também uma função de estado. A força de origem electromagnética pode ser assim calculada através da expressão 1.11 ou alternativamente pela expressão 1.19.

Normalmente prefere utilizar-se a expressão co-energia magnética pois é função da corrente eléctrica que é uma grandeza utilizada na teoria dos circuitos. É também mais fácil de medir do que os fluxos que são grandezas internas.

Exemplo 1.3

Calcule a força que se exerce sobre a armadura do dispositivo no exemplo 1.1. Utilize para isso a expressão 1.19.

Resolução:

Considerando o circuito magnético linear, tem-se:

$$W'_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad L(x) = \frac{n^2}{R_m(x)} = \frac{n^2}{\frac{1}{\mu_0 S} \left(x + \frac{4l}{\mu_r} \right)}$$

$$F_{em} = \frac{\partial W'_m}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{1}{R_m^2(x)} \frac{dR_m}{dx}$$

como

$$\frac{\partial R_m}{\partial x} \approx \frac{1}{\mu_0 S}$$

Tem-se:

$$F_{em} = - \frac{1}{2} \frac{(ni)^2}{R_m^2} \frac{1}{\mu_0 S}$$

que é equivalente à expressão obtida no exemplo 1.1.

Expressões do binário electromagnético

Para um circuito magnético móvel em rotação, como o desenhado na figura 1.3, os resultados precedentes são aplicados directamente ao binário electromagnético M_{em} , a partir de raciocínios semelhantes (dW_{mec} escreve-se $dW_{mec} = M_{em} d\theta$).

Se se considerar a função energia como uma função da posição θ e do fluxo ψ , tem-se:

$$M_{em} = - \frac{\partial W_m(\psi, \theta)}{\partial \theta} \quad (1.21)$$

Se se considerar a função co-energia magnética função de i e θ , tem-se:

$$M_{em} = \frac{\partial W'_m(i, \theta)}{\partial \theta} \quad (1.22)$$

1.4. Expressões simplificadas (circuitos lineares)

Felizmente pode considerar-se na grande maioria dos casos, que os circuitos magnéticos dos transdutores ou das máquinas girantes não estão saturados magneticamente. Nestas condições a curva de magnetização $\psi(i)$ reduz-se a uma recta, e o fluxo ψ é directamente proporcional à corrente i . O factor de proporcionalidade (coeficiente de auto-indução) é função de x .

$$\psi = n \phi = L(x) i \quad (1.23)$$

ou ainda $n i = R(x) \phi$.

A energia e a co-energia magnética, apesar de serem funções de variáveis diferentes, tomam neste caso valores iguais, e as expressões simplificam-se pelo facto da variável x aparecer independente de i ou ϕ .

A energia escreve-se:

$$W_m = \frac{1}{2} R(x) \phi^2 \quad (1.24)$$

A força electromagnética, segundo (1.11), vale:

$$F_{em}(\phi, x) = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{dx} \quad (1.25)$$

A co-energia escreve-se

$$W'_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (1.26)$$

Desta expressão conclui-se, aplicando (1.19)

$$F_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad (1.27)$$

As duas expressões (1.25) e (1.27) são naturalmente idênticas tendo em conta as expressões (1.23) e derivando $L(x) = n^2/R(x)$.

A primeira corresponderá, como se verá mais tarde, ao ponto de vista dos circuitos "excitados em tensão", e a segunda ao ponto de vista dos circuitos "excitados em corrente".

Em particular, a expressão (1.27) mostra claramente que a força electromagnética resulta da corrente na bobina e da variação da indutância do circuito.

No caso de uma máquina girante, à coordenada x corresponde θ e à força corresponde o binário:

$$M_{em}(\phi, \theta) = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{d\theta} \quad (1.28)$$

$$M_{em}(i, \theta) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (1.29)$$

Das expressões 1.28 e 1.29 pode concluir-se que para o cálculo da força ou do binário não é necessário conhecer todos os parâmetros geométricos do conversor electromecânico. É necessário conhecer apenas a função $R(x)$ ou $L(x)$. O mesmo se pode dizer para o cálculo das grandezas eléctricas. Com efeito, para o caso do conversor electromecânico da figura 1.2, tem-se:

$$u = ri + \frac{d\psi}{dt} = ri + \frac{d}{dt}(L(x) i) \quad (1.30)$$

$$u = ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dt} \quad (1.31)$$

$$u = ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.32)$$

Da expressão 1.32 pode concluir-se que o facto de a peça móvel se deslocar com a velocidade \dot{x} provoca uma força contra-electromotriz de movimento que vale:

$$i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.33)$$

Para o estudo completo do sistema da figura 1.2 é necessário introduzir a equação de acoplamento mecânico juntamente com a 2ª lei de Newton.

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = F_{em} - F_c \quad (1.34)$$

Assim, o estudo do sistema pode ser feito resolvendo as equações diferenciais:

$$u = ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad e \quad m \frac{dx^2}{dt^2} = F_{em} - F_c \quad (1.35)$$

Para a resolução destas equações é necessário conhecer a função $L(x)$ (própria do dispositivo) e a função F_c que depende da aplicação onde o dispositivo se empregue.

Balanço Energético:

Se se multiplicarem ambos os membros da equação 1.31 por i obtém-se:

$$u i = ri^2 + L(x) i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.36)$$

que é o mesmo que

$$u i = ri^2 + L(x) i \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.37)$$

ou

$$u i = ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(x) i^2 \right) + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.38)$$

onde

$u i \rightarrow$ potência de entrada

$ri^2 \rightarrow$ perdas de Joule

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(x) i^2 \right) \rightarrow$ Variação da energia magnética armazenada no campo

$\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \rightarrow$ potência mecânica

A expressão 1.38 traduz o princípio da conservação de energia.

Exemplo 1.4

O coeficiente de auto-indução da bobina representada na figura 1.3 pode ser calculado pela expressão analítica aproximada

$$L(\theta) = L_1 + L_2 \cos(2\theta)$$

Determinar a expressão do binário em função da corrente e da posição.

Resolução:

Segundo a expressão 1.29, o binário vale

$$M_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} = -i^2 L_2 \sin 2\theta$$

1.5. Sistemas de campo magnético de excitação múltipla

Os dispositivos que se acabam de analisar tem apenas um circuito eléctrico. A força que desenvolvem tem sempre o mesmo sentido e é proporcional ao quadrado de um fluxo ou de uma corrente. São usados geralmente para desenvolver forças de impulso não controláveis. Como exemplos têm-se: *Relés, contactores e actuadores* de vários tipos.

Para obter forças proporcionais a sinais eléctricos, e sinais proporcionais a forças e velocidades, é necessário que os dispositivos tenham dois ou mais caminhos para excitação ou troca de energia com as fontes. Os ímanes permanentes são usados frequentemente como um dos caminhos de excitação. Em muitos dispositivos, um caminho de excitação estabelece o nível do campo eléctrico ou magnético, enquanto o outro trabalha com sinais. Exemplos são:

Altifalantes, taquímetros, acelerómetros.

Todos os tipos conhecidos de motores e geradores, com excepções pouco importantes, são exemplos de dispositivos de potência, que realizam a conversão contínua de energia.

Na figura 1.5 mostra-se o modelo de um sistema elementar deste tipo. O sistema deve ser descrito em termos de três variáveis independentes que podem ser os fluxos ligados ψ_1 e ψ_2 e o ângulo mecânico θ , ou as correntes i_1 e i_2 e o ângulo θ , ou um conjunto híbrido de variáveis.

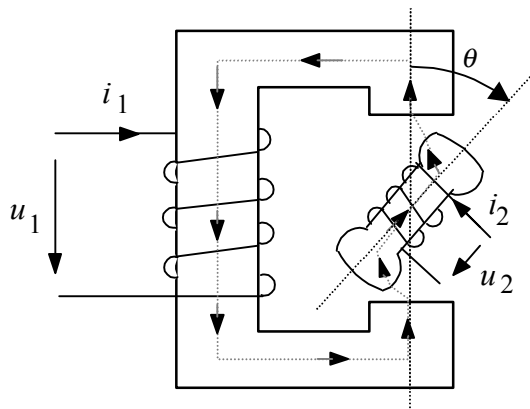


Figura 1.5. Sistema electromecânico de excitação dupla.

Quando se utilizam os fluxos ligados, um raciocínio semelhante ao apresentado no número anterior permite concluir que as equações paramétricas são extensões das equações 1.10, 1.11, 1.19 e 1.20. Assim:

$$i_1 = \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \psi_1} \quad (1.39)$$

$$i_2 = \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \psi_2} \quad (1.40)$$

$$M_{em} = - \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (1.41)$$

onde a função energia é dada por:

$$W_m(\psi_1, \psi_2, \theta) = \int_0^{\psi_1} i_1 d\psi_1 + \int_0^{\psi_2} i_2 d\psi_2 \quad (1.42)$$

Quando se usam as correntes para descrever o estado do sistema, as equações paramétricas ficam:

$$\psi_1 = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1} \quad (1.43)$$

$$\psi_2 = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2} \quad (1.44)$$

$$M_{em} = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (1.45)$$

e a co-energia é dada por:

$$W'_m(i_1, i_2, \theta) = \int_0^{i_1} \psi_1 di_1 + \int_0^{i_2} \psi_2 di_2 \quad (1.46)$$

Nos casos que se têm vindo a analisar tem-se considerado apenas um grau de liberdade para o deslocamento x (para translação) ou θ (para rotação).

Dos raciocínios que se apresentaram não é difícil concluir que para os casos em que o deslocamento se possa fazer em duas ou 3 direcções independentes se tem:

$$F_{emx}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial x} \quad (1.47)$$

$$F_{em_y}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial y} \quad (1.48)$$

$$F_{em_z}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial z} \quad (1.49)$$

As forças F_{em_x} , F_{em_y} , F_{em_z} seriam substituídas por binários M_θ , M_γ , M_ε se as direcções de movimento fossem θ , γ , ε .

Exemplo 1.5

Elemento de relutância variável com dois graus de liberdade

O sistema está definido na figura 1.6. Permite exercer simultaneamente uma força de atracção vertical e uma força de centragem lateral. Um sistema deste tipo é próprio para a sustentação magnética e a guiagem de certos comboios de grande velocidade.

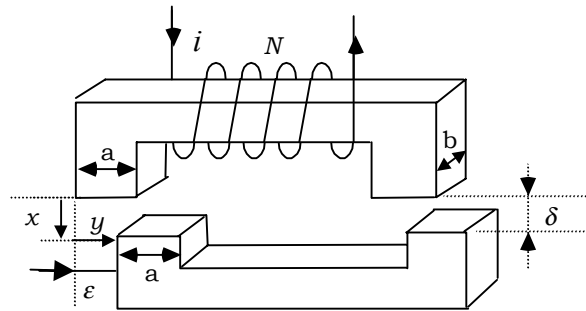


Figura 1.6. Elemento de relutância variável

Determine as componentes da força que se exerce sobre a peça móvel.

Resolução

A. Hipóteses:

1. As linhas de campo só existem na zona de entreferro mínimo e têm a direcção de x .
2. A permeabilidade do ferro é infinita.
3. O referencial encontra-se na peça fixa na qual se encontra o enrolamento.

B. Determinação das forças

Tendo em conta as hipóteses consideradas tem-se para o valor da permeância.

$$P = \frac{\mu_0 b(a-y)}{2x}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} n^2 i^2 P = W'_m$$

As forças que se exercem sobre a peça segundo x e y serão:

$$F_{mx} = \frac{\partial W'_m(i, x, y)}{\partial x} \quad F_{my} = \frac{\partial W'_m(i, x, y)}{\partial y}$$

$$F_{mx} = \frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{dP}{dx} \quad F_{my} = \frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{dP}{dy}$$

$$F_{mx} = -\frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{\mu_0 b(a-y)}{2ax^2} \quad F_{my} = -\frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{\mu_0 b}{2x}$$

CONCLUSÕES:

- . Tanto F_{mx} como F_{my} tem resultados independentes do sentido de i , F_{mx} é força de atracção (sempre) e F_{my} tende a centrar a peça.
- . A intensidade de F_{mx} é tanto maior quanto mais centradas estiverem as peças.
- . F_{mx} e F_{my} variam inversamente com a dimensão do entreferro. F_{mx} depende do quadrado do entreferro e F_{my} varia inversamente com o entreferro.

Nota: As expressões da permeância e das forças acima indicadas foram determinadas desprezando a relutância do ferro ($\mu_r = \infty$). Esta aproximação é válida quando o entreferro for grande. Quando $x \rightarrow 0$ é necessário considerar também a relutância do ferro.

1.6. Caso do circuito magnético linear.

Considere-se agora que os circuitos magnéticos da figura 1.5 são lineares. Os fluxos ligados com cada um dos dois circuitos qualquer que seja a sua posição são iguais à soma do fluxo criado pela própria corrente e do fluxo criado pela corrente que circula no outro circuito. Ou seja

$$\psi_1 = L_1(\theta) i_1 + M(\theta) i_2 \quad (1.50a)$$

$$\psi_2 = M(\theta) i_1 + L_2(\theta) i_2 \quad (1.50b)$$

As funções energia magnética e co-energia magnética, embora funções expressas em termos de variáveis diferentes, tomam o mesmo valor numérico.

$$W_m(\psi_1, \psi_2, \theta) = W'_m(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} \psi_1 i_1 + \frac{1}{2} \psi_2 i_2 \quad (1.51)$$

ou

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1(\theta) i_1^2 + M(\theta) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2(\theta) i_2^2 \quad (1.52)$$

donde se conclui que o binário vale

$$M_{em} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} \quad (1.53)$$

esta expressão é uma generalização da expressão 1.29. As equações eléctricas são:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (1.54)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \quad (1.55)$$

introduzindo as equações 1.50, obtém-se:

$$u_1 = r_1 i_1 + \left[L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right] + \left[i_1 \frac{dL_1}{d\theta} + i_2 \frac{dM}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (1.56)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + \left[M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right] + \left[i_1 \frac{dM}{d\theta} + i_2 \frac{dL_2}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (1.57)$$

Nestas equações as primeiras expressões entre parêntesis representam as "f.e.m. de transformação" (que aparecem sempre como no caso dos transformadores), e as segundas representam as "f.e.m. de velocidade".

As expressões 1.56 e 1.57 podem tomar uma forma mais condensada se se utilizar a notação matricial. Com efeito, definindo:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_1(\theta) & M(\theta) \\ M(\theta) & L_2(\theta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

e notando que:

$$W'_m = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \mathbf{L}(\theta) \mathbf{I} \quad (1.59)$$

Obtém-se

$$M_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{L}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \quad (1.60)$$

e

$$U = R I + L(\theta) \frac{d}{dt} I + \dot{\theta} \frac{dL}{d\theta} I \quad (1.61)$$

onde

 $R I$ queda de tensão resistiva $L(\theta) \frac{d}{dt} I$ f.e.m. de transformação $\dot{\theta} \frac{dL}{d\theta} I$ f.e.m. de velocidade

As expressões 1.60 e 1.61 são válidas também para o caso em que existem mais do que dois circuitos ligados magneticamente. A definição das matrizes será a correspondente.

O estudo completo de um sistema com vários circuitos ligados magneticamente faz-se com as equações diferenciais (1.61) e a 2ª equação de Newton associada à expressão do binário.

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{2} I^T \left[\frac{dL(\theta)}{d\theta} \right] I - M_c \quad (1.62)$$

Como o binário depende apenas das correntes e da posição, e não das derivadas das correntes, pode dizer-se que há desacoplamento entre as equações (1.61) e a equação (1.62).

1.7. Aplicação ao caso de circuitos magnéticos com ímanes permanentes.

A expressão 1.53 pode tomar uma forma diferente utilizando as permeâncias definindo os coeficientes de indução do seguinte modo:

$$L_{1(\theta)} = n_1^2 P_{1(\theta)} \quad L_{2(\theta)} = n_2^2 P_{2(\theta)} \quad M_{(\theta)} = n_1 n_2 P_{M(\theta)} \quad (1.63)$$

Obtém-se após substituição:

$$M_{em} = \frac{1}{2} n_1^2 i_1^2 \frac{dP_{1(\theta)}}{d\theta} + n_1 i_1 n_2 i_2 \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} + \frac{1}{2} n_2^2 i_2^2 \frac{dP_{2(\theta)}}{d\theta} \quad (1.64)$$

ou seja

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{m1}^2 \frac{dP_{1(\theta)}}{d\theta} + F_{m1} F_{m2} \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} + \frac{1}{2} F_{m2}^2 \frac{dP_{2(\theta)}}{d\theta} \quad (1.65)$$

A expressão 1.65 é adaptada para o estudo de dispositivos constituídos por um circuito magnético, um íman permanente e um bobina. Designado com o índice i o íman e com o índice b a bobina tem-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_{1(\theta)}}{d\theta} + F_{mi} n_b i_b \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} + \frac{1}{2} (n_b i_b)^2 \frac{dP_{2(\theta)}}{d\theta} \quad (1.66)$$

O termo F_{mi} é constante e depende do íman utilizado.

Classificação dos dispositivos electromecânicos consoante o uso de íman permanente

Os dispositivos electromecânicos podem ser de dois tipos, consoante a natureza do campo de acoplamento: dispositivos de natureza electrostática, se se basearem no campo eléctrico, e dispositivos de natureza electromagnética se se basearem no campo magnético.

Nos sistemas de natureza electromagnética é frequente a utilização de ímanes permanentes.

Não considerando as máquinas rotativas tradicionais, distinguem-se os seguintes 4 casos:

- *Sistemas relutantes ou de relutância.* Não possuem íman permanente. Baseiam-se na variação de relutância com a coordenada de posição. São caracterizados por não apresentar termo de binário devido à interacção mútua entre a parte fixa e a parte móvel.

- *Sistemas electrodinâmicos.* São caracterizados por um íman e um circuito ferromagnético fixos com uma (ou várias) bobinas moveis. Neste caso a força deve-se essencialmente à interacção mútua entre a parte fixa e a parte móvel.

$$M_{em} \approx F_{mi} n_b i_b \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} \quad (1.67)$$

• *Sistemas electromagnéticos.* São caracterizados por um circuito ferromagnético e uma bobina fixa com um íman permanente móvel. O íman é atravessado pela parte principal do fluxo criado pela bobina e é constituído por um material de fraca permeabilidade magnética equivalente. A força devida apenas à bobina é independente da posição. A força total depende da posição do íman bem como da posição mútua entre a bobina e o íman.

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_1(\theta)}{d\theta} + F_{mi} n_b n_b \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} \quad (1.68)$$

• *Sistemas relutantes polarizados.* Neste caso o termo de força mútua e o termo de força devido à bobina tem uma ordem de grandeza comparáveis. A expressão do binário nestes sistemas é semelhante à expressão 1.66.

Anexo 1: Expressões matemáticas para a energia magnética

Caso geral

A energia magnética pode ser obtida pelo integral de volume da densidade de energia. Assim obtém-se:

$$W_m = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (\text{A1.1})$$

e

$$W_m = \iiint_V \left(\int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV \quad (\text{A1.2})$$

Para a utilização desta equação é necessário conhecer toda a geometria do dispositivo que se estiver a estudar e os campos \vec{B} e \vec{H} em todos os pontos do volume V onde é calculado o integral da expressão A1.2.

Na expressão A1.2, a energia magnética armazenada é expressa em termos de propriedades específicas ou por unidade de volume do campo magnético. Este ponto de vista é o do projectista que pensa em termos de materiais, intensidade de campo, intensidade de esforços e conceitos semelhantes. Constrói então a forma geométrica e o arranjo de qualquer dispositivo específico a partir do conhecimento que possa fazer com um volume unitário dos materiais disponíveis.

A energia magnética também pode ser escrita em termos de fluxos ligados ψ e das correntes i . Com efeito, tem-se da teoria dos circuitos:

$$W_m(\psi, x) = \int_0^\psi i(i, \psi) d\psi \quad (\text{A1.3})$$

onde a corrente é uma função da posição x e do fluxo ligado ψ . Daqui resulta que a energia magnética é uma função do fluxo e da coordenada de posição. Basta conhecer a relação $i(\psi, x)$ e o integral da equação A1.3 para se obter a energia magnética.

Na expressão A1.3, a energia é expressa em termos do fluxo ligado e indutâncias, conceitos particularmente úteis quando a não-linearidade não é importante. O ponto de vista aqui é o do analista de circuitos. A teoria do funcionamento da maioria dos dispositivos de conversão electromecânica pode ser desenvolvida supondo que o dispositivo é um elemento do circuito (teoria de circuitos) com indutância variável com

a posição. Este ponto de vista dá pouca compreensão dos fenómenos internos e não dá qualquer ideia do tamanho físico.

Uma posição intermédia entre a do projectista e a do analista de circuitos é obtida a partir da equação 1.12 a partir de uma mudança de variável. Com efeito, como $\psi = n\phi$,

$$W_m(\psi, x) = \int_0^\psi i d\psi = \int_0^\phi n i d\phi \quad (\text{A1.4})$$

Como a $F_{m.m}$ é uma função do fluxo, e a relação entre as várias grandezas depende da configuração geométrica da bobina, do circuito magnético e das propriedades magnéticas do material do núcleo, obtém-se:

$$W_m(\phi, x) = \int_0^\phi F_{mm}(\phi, x) d\phi \quad (\text{A1.5})$$

Caso do circuito magnético linear.

Devido à simplicidade das equações resultantes, a não-linearidade magnética e as perdas no núcleo são frequentemente desprezadas na análise de dispositivos práticos. Os resultados finais de tais análises aproximadas podem, se necessário, ser corrigidos por métodos semi-empíricos para levar em conta os efeitos dos factores desprezados.

A expressão A1.2 toma agora a forma:

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (\text{A1.6})$$

Admitindo a linearidade do circuito magnético, a relação entre o fluxo ϕ e $F_{m.m}$ é dada pela relutância R ou pela permeância P , definidas como:

$$R = \frac{F_{mm}}{\phi} \quad (\text{A1.7})$$

$$P = \frac{1}{R} \quad (\text{A1.8})$$

a energia vem:

$$W_m = \frac{1}{2} i \psi = \frac{1}{2} F_{mm} \phi = \frac{1}{2} R \phi^2 \quad (\text{A1.9})$$

Definindo a auto-indutância da bobina

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{n\phi}{i} = n^2 P \quad (\text{A1.10})$$

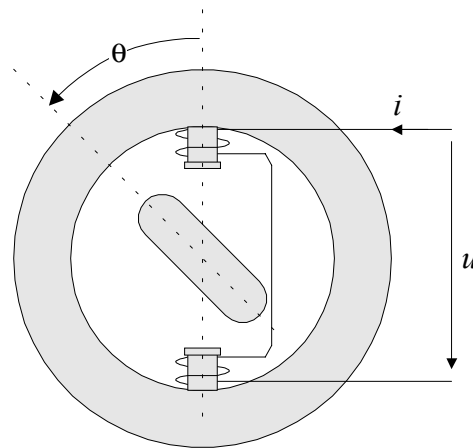
obtém-se também

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L} \quad (\text{A1.11})$$

Exercícios de Revisão

I

Considere a máquina eléctrica representada na figura seguinte:



Determinou-se experimentalmente a indutância da bobina e obteve-se a expressão:

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos 2\theta + L_6 \cos 6\theta$$

em que L_0 , L_2 e L_6 são constantes e θ é a posição do rotor.

A - O enrolamento encontra-se alimentado por uma fonte de corrente.

$$i(t) = I \sin \omega t$$

A-1.Determine o modelo matemático que lhe permita determinar o comportamento dinâmico deste sistema.

A-2.Obtenha uma expressão para a energia magnética armazenada.

A-3.Qual a relação entre a energia magnética armazenada média e o binário de origem electromagnética.

B - O enrolamento encontra-se alimentado por uma fonte de tensão:

$$u(t) = U \sin \omega t$$

B-1.Determine o modelo matemático que lhe permita determinar o comportamento dinâmico deste sistema.

B-2. Obtenha uma expressão para a energia magnética armazenada.

B-3. Qual a relação entre a energia magnética armazenada média e o binário de origem electromagnética.

B-4. Em que condições esta máquina poderá transformar energia eléctrica em energia mecânica de uma forma contínua no tempo.

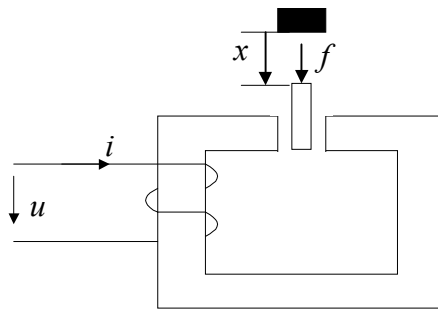
B-5. Será que esta máquina pode funcionar como gerador? Justifique a resposta.

II

Para o transdutor magnético de um circuito eléctrico mostrado na figura, foi determinado experimentalmente que:

$$\psi = \frac{\sqrt{i}}{3(1 - a x^3)}$$

em que $a = 10^4$.



Esta representação é válida no intervalo $0 \leq i \leq 3\text{ A}$ e $0 \leq x \leq 0,04\text{ m}$. Desprezar os efeitos da gravidade.

a) Calcule uma expressão da força f em função das variáveis do sistema.

b) Considerando que a bobina se encontra alimentada com uma fonte de corrente de amplitude constante e igual a 3 A , determine a expressão da força. Determine se a força actua no sentido do aumento ou da diminuição de energia magnética armazenada.

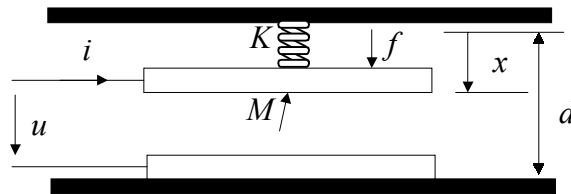
c) Considerando que a bobina se encontra alimentada por uma fonte de tensão alternada sinusoidal de frequência igual a 500 Hz e que a resistência do condutor é nula, determine uma expressão para a força e se o sentido dessa força actua no sentido de diminuição ou aumento de energia magnética média armazenada no sistema.

III

No dispositivo que se mostra na figura, os campos de dispersão nas extremidades podem ser desprezados. O valor da capacidade pode ser assim determinada e expresso como:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - x}$$

onde A é a área da armadura. Quando se aplicar uma tensão $u=0$ e uma força $f=0$, o sistema encontra-se em equilíbrio em $x=0$. Despreze qualquer atrito mecânico mas considere a força da gravidade.



- a) Determine as equações dinâmicas do dispositivo.

IV

Determinou-se experimentalmente que a relação entre o fluxo e a corrente de um determinado sistema electromecânico depende da posição da sua peça móvel x e da corrente i pela relação:

$$\psi = \left(\frac{1000 i}{x^3 + 1} \right)^{2/3}$$

A bobina tem uma resistência de r ohm.

- a) Obtenha uma expressão para a força mecânica de origem eléctrica.
b) Escreve as equações do movimento do sistema.

V

Um determinado sistema eléctrico tem uma relação entre as cargas e os potenciais dada por:

$$q(u, x) = q_m (1 - e^{-\beta x u})$$

onde β e q_m são constantes e u é a tensão entre as armaduras do condensador. O ponto de equilíbrio do sistema é $x = x_0$.

Obtenha as equações dinâmicas deste sistema.

VI

Um determinado sistema magnético com dois pares de terminais eléctricos (u_1, i_1) e (u_2, i_2) e um grau de liberdade mecânico (f, x) é definido pela seguinte relação entre as tensões e as correntes:

$$u_1 = 2 a i_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d}{dt} (b(x) i_2)$$

$$u_2 = \frac{d}{dt} (b(x) i_1) + 2 c i_2 \frac{di_2}{dt}$$

em que a e c são duas constantes reais positivas e $b(x)$ é independente de qualquer corrente e é unívoca para cada x .

a) Será a co-energia magnética uma função de estado de i_1 , i_2 e x ? Determine esta co-energia.

b) Será que a energia magnética armazenada é igual à co-energia?

c) Obtenha uma expressão para a força em termos das variáveis i_1 , i_2 e x .

Capítulo 2

Sensores e Actuadores Electromecânicos

Neste capítulo faz-se uma abordagem ligeira dos sensores e actuadores electromecânicos de vários tipos. A classificação que se adoptou encontra-se generalizada em alguns livros da especialidade. Os sistemas onde os fenómenos de conversão de energia são essencialmente de origem magnética são classificados de acordo com a presença ou não de um ou vários ímanes permanentes e da sua localização. A matéria que se encontra tratada neste capítulo pode ser considerada como aplicações da teoria descrita no primeiro capítulo.

2.1 - Sistemas de relutância

Modelo Matemático

Por definição, um sistema de relutância não comporta nenhum íman permanente sendo o seu binário (ou força) caracterizado por componentes resultantes da variação da indutância própria das bobinas. Assim, existirá obrigatoriamente uma variação dos circuitos magnéticos associados a estas indutâncias. No caso do circuito magnético linear com apenas uma bobina, temos para as equações do binário e das tensões:

$$M_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (2.1)$$

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2)$$

Propriedades gerais dos sistemas relutantes

Da equação 2.1 pode concluir-se:

- O binário é proporcional ao quadrado da corrente. O sentido do binário é independente do sentido da corrente que atravessa a bobina. O sistema não é linear na conversão electromecânica e não é apropriado para a transmissão de informação analógica. Para a análise destes sistemas não é válido o princípio da sobreposição.

- Para obter um binário significativo, a variação da indutância própria deverá ser a maior possível. Esta variação faz-se à custa de circuitos magnéticos cuja relutância varia com a posição da peça móvel.

- A grande variação de relutância magnética que se referiu no ponto atrás traduz-se por fortes variações de fluxo. É vulgar o aparecimento de uma saturação importante em certas zonas do circuito magnético. Assim, estes sistemas são difíceis de estudar apesar de serem de concepção simples.

Exemplos

Exemplo 1: Electroímans

Um Electroíman é um componente de um sistema mais complexo como por exemplo, um relé, um contactor, uma electroválvula, etc.

Como se viu num dos exemplos do capítulo anterior, a força num sistema de relutância é sempre uma força de atracção. Um electroíman pode ser constituído apenas pelo sistema de atracção ou também pelo sistema ferromagnético que se desloca (atraído). No primeiro caso dizem-se electroímans abertos.

Os electroímans podem ser classificados consoante a sua geometria, do seguinte modo:

A - Núcleo em forma de U

Podem tomar várias formas. São 4 as mais frequentes (fig. 2.1):

- Armadura plana
- Armadura de fecho
- Armadura penetrante
- Armadura girante

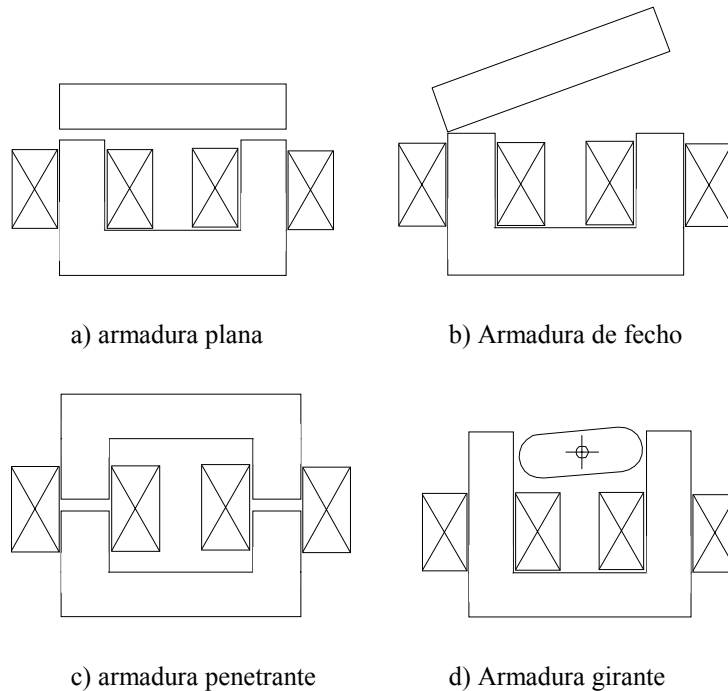


Fig. 2.1. Electroímans em forma de U.

B - Electroímans em forma de E

São 4 os mais frequentes (Fig. 2.2):

- Armadura plana
- Núcleo de fecho
- Armadura penetrante
- Armadura girante

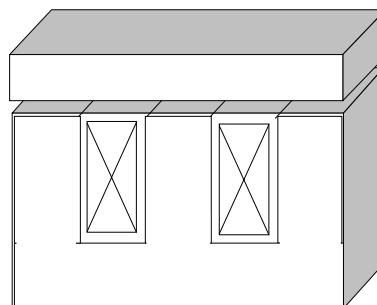


Fig. 2.2. Electroíman em forma de E de armadura plana.

Esta construção geométrica conduz a uma melhor protecção mecânica e magnética da bobina. Pode ser realizada com núcleo magnético folheado.

C - Electroímans cilíndricos

Podem ser construídos de duas formas:

- Armadura plana (Fig. 2.3)
- Núcleo penetrante

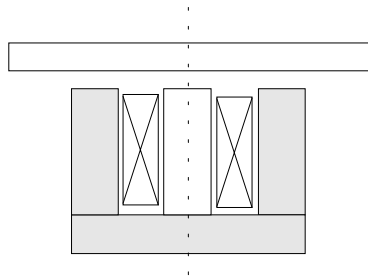


Fig. 2.3. Electroímã cilíndrico de armadura plana.

Neste caso é óptima a protecção da bobina, tanto do ponto de vista mecânico como magnético. É possível um funcionamento com corrente alternada recorrendo a materiais ferromagnéticos de baixa condutividade.

D. Electroímans de duplo efeito e reversíveis.

Trata-se da duplicação de um electroímã simples. O sistema é composto de duas bobinas. Numa estrutura de duplo efeito é necessário assegurar uma posição média através de uma mola ou de outro processo exterior. A excitação de uma das bobinas provoca um deslocamento com um determinado sentido. A excitação da outra bobina provoca um deslocamento no sentido contrário. Em caso de corrente nula a mola mantém a peça móvel numa determinada posição.

Nas estruturas reversíveis, o electroímã compreende duas posições extremas correspondente à alimentação de uma ou outra bobina. Não há aqui o ponto médio estável como acontece na estrutura de duplo efeito.

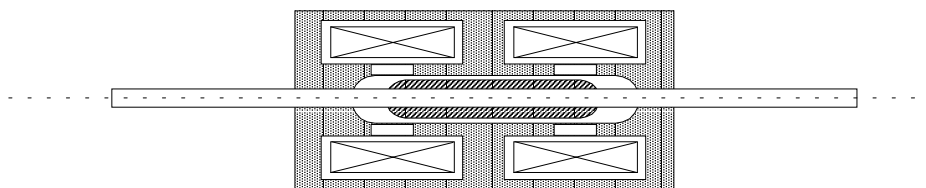


Fig. 2.4. Electroímã reversível.

Influência da forma do circuito magnético

A forma de circuito magnético de um dispositivo relutante é fundamental na característica de força em função da posição. O objectivo é realizar um dispositivo com característica adaptada à aplicação em causa. Para isso recorre-se frequentemente à saturação magnética de determinadas zonas do circuito magnético. As peças são projectadas de modo que as zonas que se querem saturadas tenham uma menor secção. Assim obtém-se características de força ou binário em função da posição diferentes das consideradas no exemplo do capítulo anterior onde não se considerou a saturação. Neste caso o andamento da força segue uma lei próxima de:

$$f(\delta) = \frac{k}{(\delta+a)^2} \quad (2.3)$$

Onde k e a são duas constantes.

Exemplo 2: Relés

Um relé é constituído por um electroímã que actua associado a uma mola. A bobina ao ser percorrida por corrente eléctrica faz deslocar uma peça móvel e assim fecha ou abre contactos eléctricos. Tem-se assim um sistema de interruptores que fecham ou abrem consoante existe corrente ou não numa bobina. Este dispositivo continua a ser muito utilizado em automatismos industriais.

Exemplo 3: Contactores

Um contactor tem o mesmo princípio de funcionamento que um relé mas assegura nos seus contactos o fecho ou corte de correntes e tensões mais importantes. O elemento motor é um electroímã normalmente de armadura penetrante em E. A bobina pode ser alimentada em corrente alternada ou em corrente contínua. É frequente o utilizador poder escolher várias gamas de tensão a utilizar para os dois tipos de corrente (AC e DC).

Além dos contactos principais que deverão ser realizados de forma a cortar correntes elevadas (e indutivas), o contactor dispõe de um ou mais contactos auxiliares que poderão ser utilizados na concepção do sistema de comando da instalação. O contactor é o sistema mais usado para ligar os motores de indução à rede de energia.

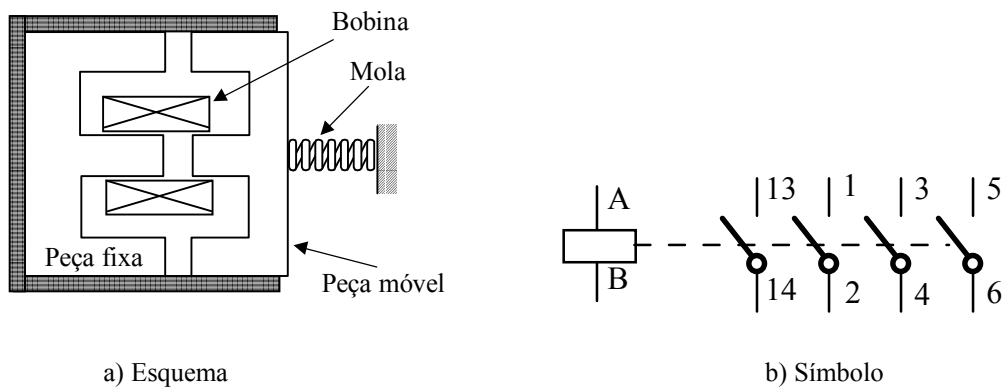


Fig. 2.5. Contactor.

Exemplo 4: Electroválvulas

A figura 2.6 representa um exemplo de electroválvula munida de um electroíman de relutância variável. É do tipo cilíndrico de núcleo penetrante. A posição de repouso (sem corrente na bobina) corresponde ao êmbolo na posição de fecho. A excitação da bobina provoca o movimento do núcleo e a correspondente deslocação do êmbolo faz abrir o circuito hidráulico.

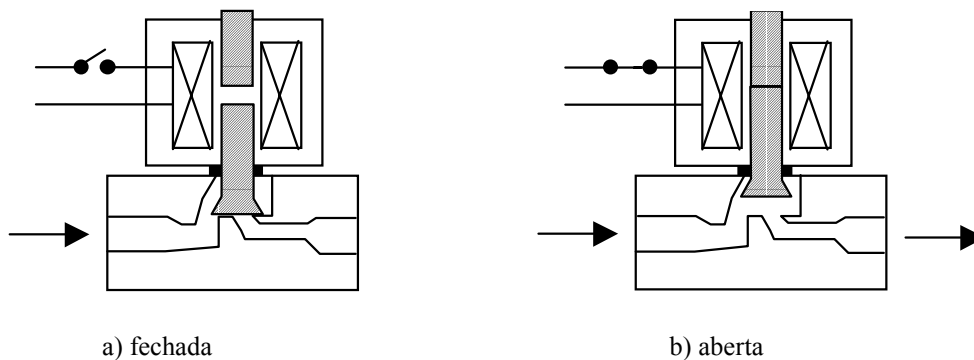


Fig.2.6. Electroválvula.

Exemplo 5: Motor oscilante relutante

A figura 2.7 representa um motor oscilante de movimento angular. A posição de equilíbrio sem corrente é definida por um sistema de molas.

Análise de um motor de relutância rotativo, alimentado em corrente alternada

A - Cálculo do binário a partir da relutância

Considere-se o motor rotativo desenhado na figura 2.9. Para calcular o binário electromagnético M_{em} exercido sobre o "rotor" pode utilizar-se a equação 1.28. Para isso é necessário estudar como é que a relutância do circuito magnético varia em função do ângulo θ : é claro que a relutância do entreferro é preponderante. Esta relutância varia fortemente com θ :

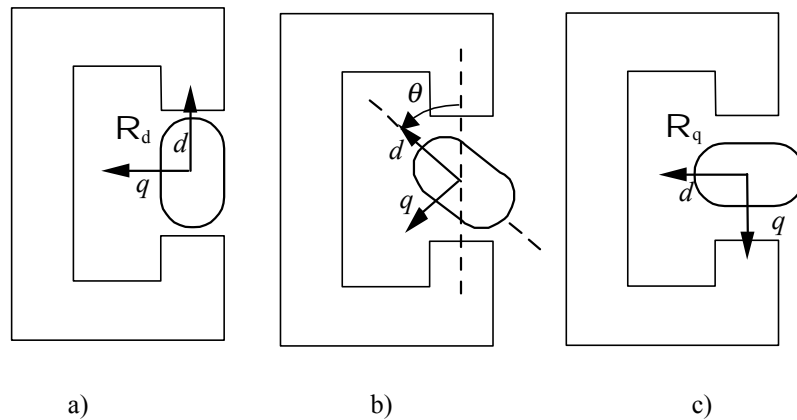


Fig. 2.9. Máquina de relutância. Esta figura mostra apenas a parte do circuito magnético não estando representada a bobina de excitação.

- a) Se $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$, isto é, logo que o rotor esteja alinhado segundo o eixo d (fig. 2.9) a relutância é mínima (pois o comprimento do caminho do fluxo no ar é mínimo). Chamemo-lhe R_d sem a calcular:

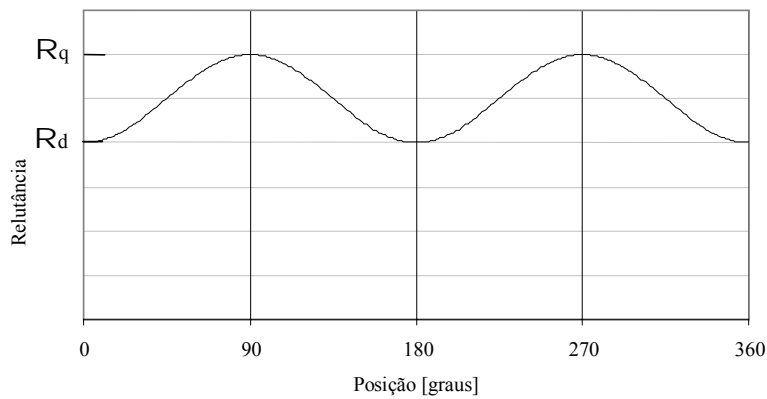
$$R_d = R_{min}$$

- b) Quando $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$, isto é o rotor encontra-se alinhado segundo o eixo q perpendicular a d , a relutância é máxima (fig. 1.9c). Chamemo-lhe R_q :

$$R_q = R_{max}$$

- c) Para valores intermédios de θ , a relutância toma valores intermédios entre R_d e R_q . Depende da geometria do rotor e da distribuição do fluxo no ar.

O andamento destas variações em função de θ está representado na figura 2.10.

Fig. 2.10. Variação de relutância segundo θ .

Tendo em conta que a relutância toma o mesmo valor em cada meia volta, conclui-se que $\mathbf{R}(\theta)$ é uma função periódica do ângulo 2θ . A lei matemática aproximada que normalmente se adopta, resulta de um desenvolvimento em série de Fourier limitado a dois termos. Esta lei encontra-se representada na figura 2.10. Para o estudo analítico, vai admitir-se algum erro e considerar a expressão 2.4 como a lei aproximada.

$$\mathbf{R}(\theta) = \frac{R_d + R_q}{2} + \frac{R_d - R_q}{2} \cos 2\theta \quad (2.4)$$

Aplicando a expressão 1.28 tem-se para o binário:

$$M_{em} = \frac{1}{2} \phi^2 (R_d - R_q) \sin(2\theta) \quad (2.5)$$

B - Sistema de relutância alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal

Suponhamos que a tensão aos terminais da bobina é sinusoidal e de frequência angular $\omega = 2\pi f$.

$$u = \sqrt{2} U \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

Se se desprezar a resistência, o fluxo vem:

$$\phi = \frac{1}{N} \int u dt = \sqrt{2} \Phi \sin(\omega t) \quad \text{onde} \quad \Phi = \frac{U}{\omega N} \quad (2.7)$$

Substituindo na expressão do binário tem-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} \phi^2 (R_d - R_q) \sin(2\theta) = \Phi^2 (R_d - R_q) \sin(2\theta) \sin^2(\omega t) \quad (2.8)$$

Suponhamos que o rotor roda a uma velocidade constante. Temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_m \quad (2.9)$$

ou

$$\theta = \omega_m t - \alpha_m \quad (2.10)$$

Utilizando as expressões

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

obtém-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} \Phi^2 (R_d - R_q) \left\{ \begin{array}{l} \sin(2\omega t - 2\alpha_m) \\ -\frac{1}{2} \sin[2(\omega_m + \omega)t - 2\alpha_m] \\ -\frac{1}{2} \sin[2(\omega_m - \omega)t - 2\alpha_m] \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Se ω e ω_m forem valores quaisquer, as 4 parcelas têm valores médios nulos.

Se $\omega_m = \pm \omega$, um dos dois últimos termos torna-se igual a $+(1/2) \sin(2\alpha_m)$ e os outros têm valor médio nulo.

O valor médio do binário é então:

$$M_{em_{av}} = \frac{1}{4} \Phi^2 (R_d - R_q) \sin(2\alpha_m) \quad (2.12)$$

Para que o dispositivo produza binário de valor médio não nulo, é necessário que o rotor gire a uma velocidade angular igual à pulsação da fonte.

$$\omega_m = \omega \rightarrow N_r = 60 f \text{ [rpm]} \quad (2.13)$$

Esta condição representa a condição de sincronismo e N_r é a chamada "velocidade síncrona". Assim, o motor de relutância pode desenvolver um binário médio

não nulo apenas para duas velocidades de rotação $\omega_m = \omega$ e $\omega_m = -\omega$. Não tem a capacidade de arrancar autonomamente. Se for posto em movimento por um meio auxiliar, continua a rodar tomando uma decalagem (α_m) correspondente ao binário resistente M_c . Se se aumentar progressivamente o binário de carga, o rotor aumenta a sua decalagem (α_m) no sentido negativo até se atingir o ponto:

$$\left(45^\circ, \phi^2 \frac{R_q - R_d}{4} \right) \quad (2.14)$$

onde o motor dessincroniza.

Note-se que o binário médio é proporcional ao quadrado da tensão aplicada à bobina. É também proporcional à diferença entre a relutância segundo o eixo q e a relutância segundo o eixo d .

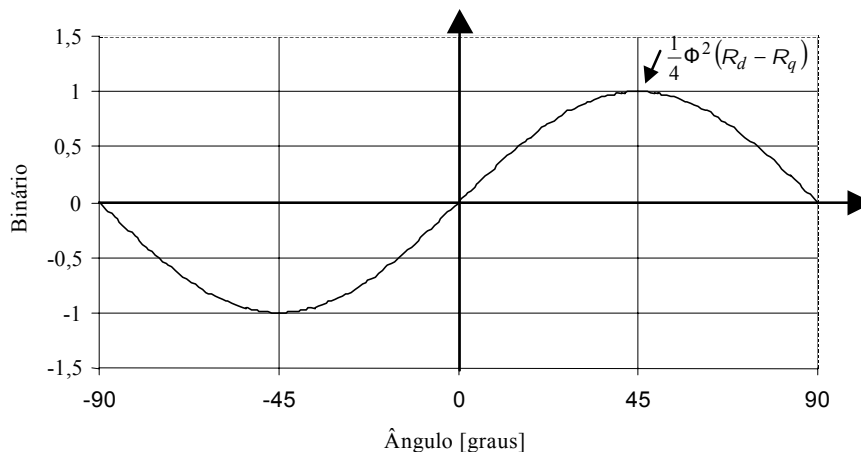


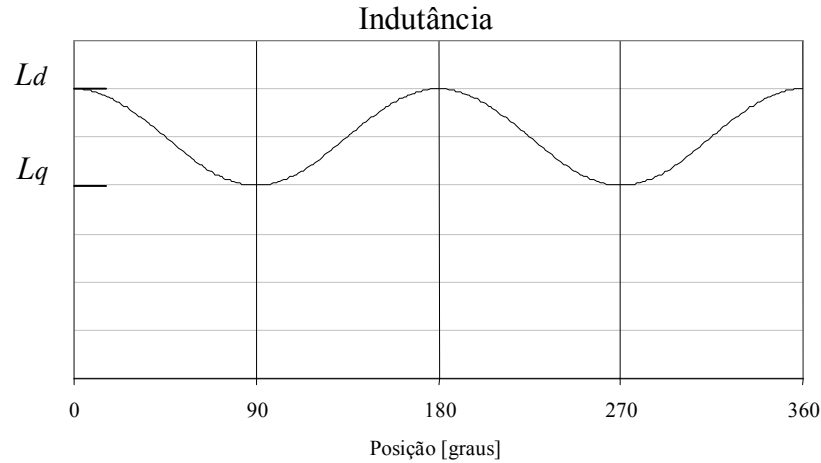
Fig. 2.11. Relação entre o binário médio e o ângulo de decalagem.

C - Cálculo do binário a partir da indutância

O motor de relutância pode ser estudado, utilizando a indutância $L(\theta)$ e aplicando a relação 2.1.

Com efeito, a indutância varia, à priori, segundo uma lei periódica de ângulo 2θ entre um valor L_d representando o máximo (para $\theta = 180^\circ, 0^\circ$ etc.) e um valor L_q representando o mínimo (para $\theta = 90^\circ, 270^\circ$).

Pode considerar-se que a indutância varia segundo uma lei sinusoidal da mesma forma que a relutância. Na figura 2.12, representa-se a lei aproximada.

Fig. 2.12. Variações da indutância em função de θ .

ou seja:

$$L(\theta) = \frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta \quad (2.15)$$

A partir da equação 2.1. obtém-se:

$$M_{em} = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin 2\theta$$

Alimentação com corrente contínua

Quando a máquina se encontrar alimentada com uma fonte de corrente contínua constante, o binário tende a alinhar o rotor com o estator. Com efeito, quando houver uma pequena variação da posição em torno do ponto de alinhamento ($\theta=0$), tem-se:

$$\Delta\theta > 0 \quad \Delta M_{em} < 0 \quad \text{Acção centralizante}$$

$$\Delta\theta < 0 \quad \Delta M_{em} > 0 \quad \text{Acção centralizante}$$

Quando se pedir um binário de carga M_c , a posição θ de equilíbrio vai ser tal que $M_{em} = M_c$.

Se a máquina rodar a uma determinada velocidade $\omega_m \neq 0$, o binário é uma função sinusoidal da posição e portanto tem valor médio nulo.

Alimentação com uma fonte de corrente alternada

Suponha-se então que a corrente na bobina seja sinusoidal de pulsação ω

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t) \quad (2.16)$$

deduz-se que o binário instantâneo exercido sobre o rotor vale:

$$M_{em} = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin(2\theta) = -I^2 (L_d - L_q) \sin(2\theta) \cos^2(\omega t) \quad (2.17)$$

Atendendo à semelhança formal com a equação 2.8 pode afirmar-se que este binário é oscilatório e que o seu valor médio, à velocidade de sincronismo, vale:

$$M_{emav} = I^2 \frac{L_d - L_q}{4} \sin(2\alpha_m) \quad (2.18)$$

Em função do ângulo α_m , o binário médio varia segundo uma lei semelhante ao caso anterior.

2.2. Sistemas Electrodinâmicos

Generalidades.

Por definição um sistema electrodinâmico é caracterizado por um circuito ferromagnético composto por um íman permanente fixo e uma bobina móvel. O binário (ou a força) resulta da variação da permeância mútua entre o íman e a bobina. Os binários resultantes das variações das indutâncias próprias associados à bobina e ao íman ou são nulos ou de valor desprezável.

Equações.

Para o caso mais frequente que é composto apenas por uma bobina e por um íman, tem-se para a equação dos binários:

$$M_{em} = \frac{dP_M}{d\theta} F_{mi} n_b i_b \quad (2.19)$$

onde

P_M - Permeância mútua entre o íman e a bobina

F_{mi} , $n_b i_b$, - Forças magnetomotrizes associadas ao íman (i) e à bobina (b)

Para a equação das tensões, tem-se

$$u_b = r_b i_b + L_b \frac{di_b}{dt} + n_b \frac{dP_M}{dq} \dot{\theta} F_{mi} \quad (2.20)$$

Propriedades gerais.

Um sistema electrodinâmico é caracterizado pelas propriedades principais:

1. O binário (ou força) é proporcional à corrente da bobina. Este conversor é linear na conversão electromecânica: presta-se assim a funções de medida, de regulação ou de transformação analógica.
2. A indutância própria da bobina deve variar o menos possível em função da posição desta. Se isto não acontecer aparece uma não linearidade na característica força-corrente ou binário-corrente.
3. A zona do entreferro é caracterizada por uma indução uniforme.
4. Os sistemas electrodinâmicos são caracterizados por inércias muito baixas. Como consequência, a constante de tempo mecânica também será baixa.
5. Sendo o binário (ou a força) proporcional à corrente, uma inversão de sentido desta provocará uma inversão do sentido da força. Isto presta-se a movimentos oscilatórios de vai e vem. O principal inconveniente para realizar este movimento oscilatório encontra-se na alimentação da bobina móvel. Para um movimento contínuo de rotação ou translação, é indispensável um recurso a escovas.

Exemplo 7: Altifalante.

Princípio e características

O altifalante é um sistema que assegura uma conversão de energia eléctrica em energia acústica. O accionador do dispositivo assegura uma conversão mecânica acústica. A figura 2.13 descreve o princípio de um altifalante electromecânico. O transdutor electromecânico provoca um movimento de vai e vem na membrana que se traduzirá em sinal sonoro.

O Transdutor do altifalante

O transdutor electromecânico mais vulgar é do tipo electrodinâmico. Também poderá ser do tipo electromagnético ou electrostático.

O transdutor electrodinâmico compreende um íman e um circuito magnético em forma de pote. Podem ser utilizadas variantes diferentes.

A bobina axial é concêntrica com o núcleo central. É colocada num campo de indução magnética criado pelo íman. A alimentação da bobina em corrente alternada permite gerar um movimento oscilatório da mesma frequência, o que vai produzir um som através da membrana. A amplitude do som tem a ver com a amplitude da corrente na bobina e com a resposta mecânica de todo o sistema (membrana + bobina).

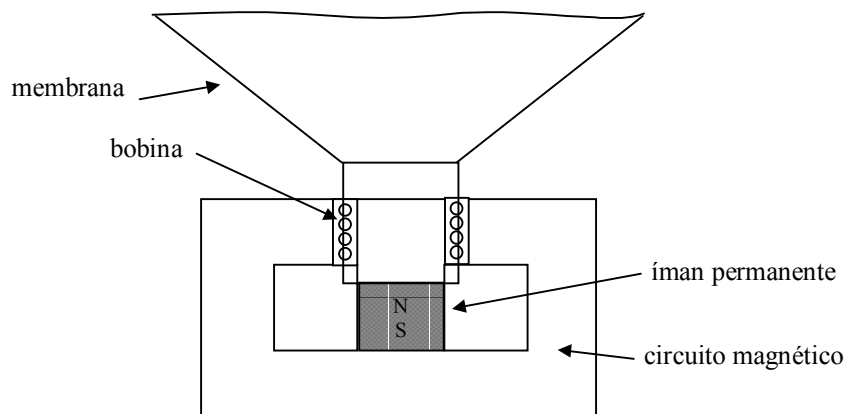


Fig. 2.13. Circuito magnético do altifalante.

Exemplo 8: Aparelhos de medida de quadro móvel

São numerosos os dispositivos de medida analógicos baseados no princípio do aparelho de quadro móvel. Este é composto por um íman permanente e de um núcleo ferromagnético fixos. No entreferro duplo é disposta uma bobina. A interacção entre o campo no entreferro e a corrente na bobina provoca um binário proporcional à intensidade da corrente da bobina. A parte móvel encontra-se ligada a uma mola de modo a assegurar um deslocamento proporcional à força e por conseguinte à corrente. Assim é possível materializar a medida de uma corrente (ou de uma tensão através de uma resistência) pela medida de um deslocamento de uma agulha. A figura 2.14 apresenta dois dispositivos de quadro móvel.

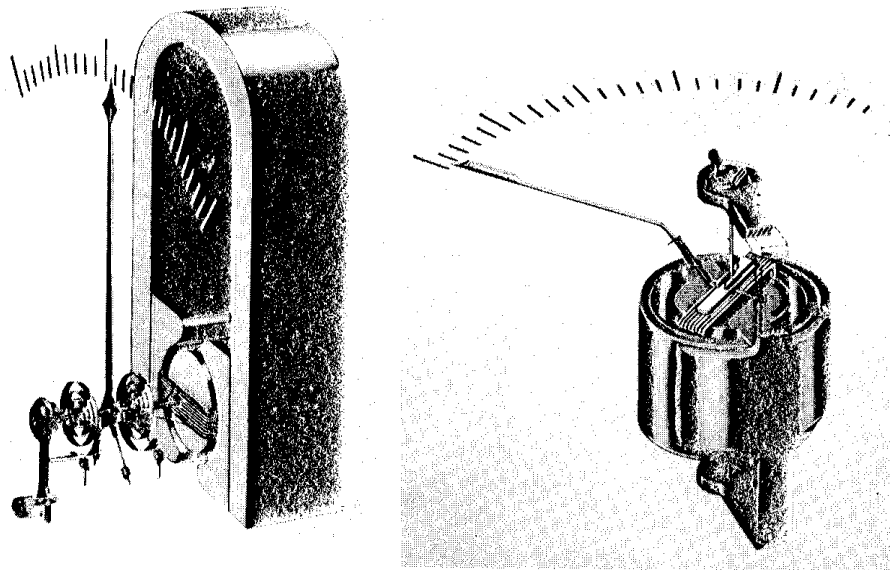


Fig. 2.14 Aparelhos de quadro móvel

Exemplo 9: Traçador

Certos traçadores são equipados dum transdutor do tipo electrodinâmico. A disposição e o princípio encontram-se representados na figura 2.15.

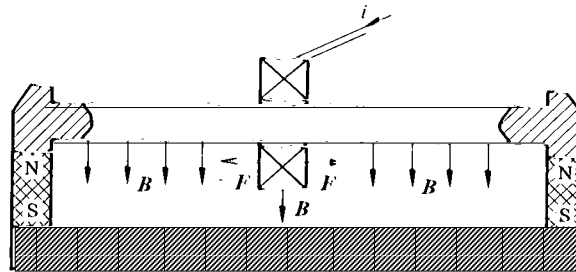


Fig. 2.15. Traçador electrodinâmico.

Um campo B é criado através de um sistema de ímans permanentes. A interacção entre este campo de indução e a corrente numa bobina provoca uma força axial. A posição da bobina é regulada através de um controlador linear de tipo analógico ou digital. Esta bobina está ligada a uma caneta que vai fazer um traço no sentido vertical no papel que se encontra em movimento na direcção horizontal.

A figura 2.16 apresenta o esquema de um outro tipo de traçador: uma impressora de jacto de tinta.

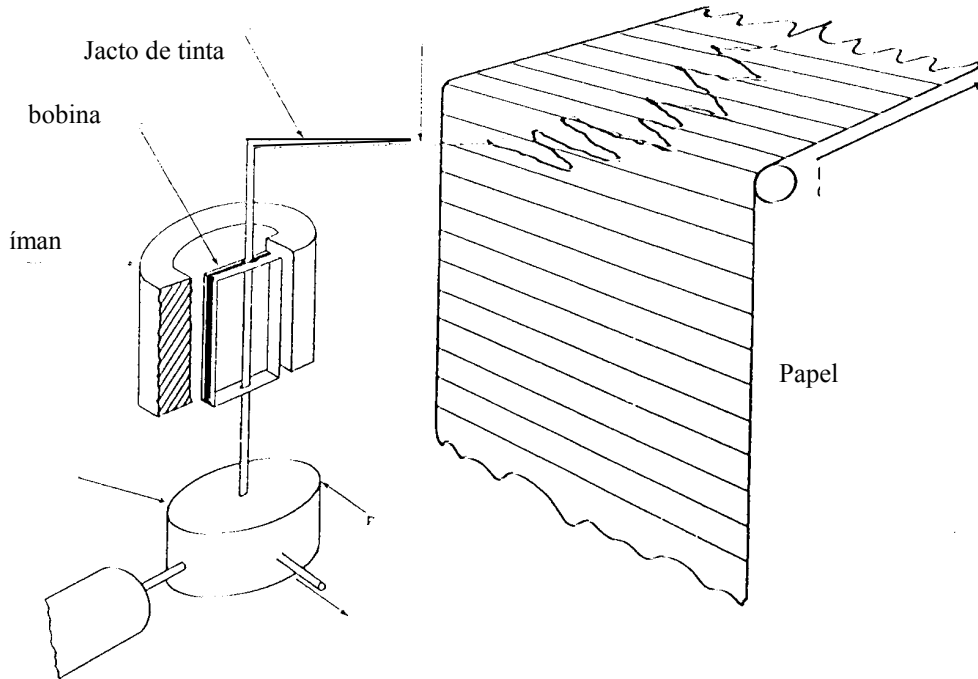


Fig. 2.16. Impressora de jacto de tinta.

2.3. Sistemas Electromagnéticos

Generalidades

Um sistema electromagnético é caracterizado por um circuito ferromagnético e uma bobina fixas e por um íman permanente móvel. O binário relutante associado à bobina é desprezável devido ao facto da permeabilidade magnética do íman ser próxima da do ar. Para um sistema composto apenas por um íman e por uma bobina, tem-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_{l(\theta)}}{d\theta} + F_{mi} n_b i_b \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} \quad (2.21)$$

e

$$u_b = r_b i_b + L_b \frac{di_b}{dt} + n_b \frac{dP_M}{d\theta} \dot{\theta} F_{mi} \quad (2.22)$$

Propriedades gerais

Um sistema electromagnético é caracterizado pelas seguintes propriedades principais:

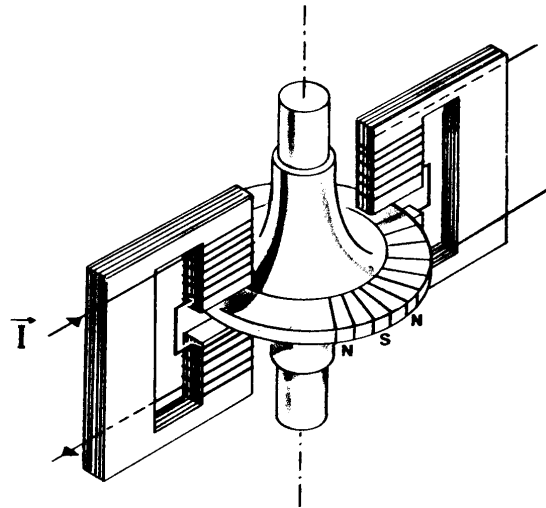


Fig. 2.18. Motor passo a passo de rotor em bolacha.

Exemplo 12: Capttores.

Certos capttores utilizam a técnica electromagnética. O íman permanente móvel está associado à grandeza a medir, em geral uma velocidade ou uma aceleração. Uma estrutura magnética ligada a bobinas permite detectar uma variação da grandeza a medir pela variação de fluxo da bobina criada pela variação do movimento do íman. As bobinas detectam uma tensão induzida que em geral é proporcional à grandeza que se pretende medir.

Como exemplo, a figura 2.19a apresenta a cabeça de leitura magnética de um gira discos tradicional. O movimento da agulha é convertido em variação de fluxo que por sua vez é detectado na bobina. A figura 2.19b apresenta um captor estereofónico.

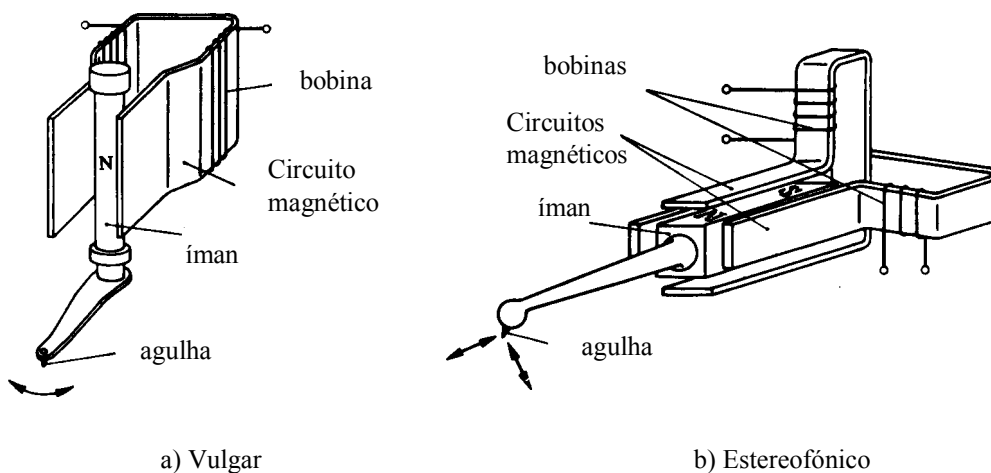


Fig. 2.19. Sistemas de leitura de um gira discos

2.4. Sistemas Relutantes Polarizados ou Híbridos

Generalidades

Um sistema relutante polarizado, também designado por sistema híbrido, é caracterizado por um íman e um circuito eléctrico fixos. A parte móvel é ferromagnética. Em certos casos o íman pode ser encontrado associado à parte móvel, mas combinado com uma estrutura ferromagnética. Ao contrário do sistema electromagnético, o fluxo principal criado pela bobina fecha-se pelo ferro sem atravessar o íman. À priori, nenhum dos termos do binário pode ser desprezado. Assim:

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_{1(\theta)}}{d\theta} + F_{mi} n_b i_b \frac{dP_{M(\theta)}}{d\theta} + \frac{1}{2} (n_b i_b)^2 \frac{dP_{2(\theta)}}{d\theta} \quad (2.23)$$

Propriedades gerais.

Estes sistemas são caracterizados pelas seguintes propriedades:

1. Apresentam as características de um sistema relutante beneficiadas com as vantagens resultantes do íman permanente.
2. Consoante a concepção, o binário de posicionamento devido apenas ao íman pode ser desprezável ou importante consoante os casos.
3. Ao contrário dos sistemas electromagnéticos, os sistemas relutantes polarizados são caracterizados por constantes de tempo elevadas pois o entreferro é relativamente estreito e o circuito magnético é essencialmente do tipo ferromagnético.

Comportamento

O movimento de um sistema relutante polarizado resulta da importância das acções dos binários mútuos relutantes e devidos ao íman permanente. A combinação das amplitudes, das fases e dos períodos geométricos destes termos diversos permite realizar sistemas com características estáticas e dinâmicas diversificadas.

Estes sistemas apresentam um carácter relutante e a saturação é muito importante.

Estruturas possíveis

À priori são possíveis duas possibilidades para a disposição relativa do íman e das bobinas de um transdutor relutante polarizado: Podem estar sobre o mesmo suporte ou em suportes diferentes. Não há nenhuma vantagem de natureza electromagnética em cada um destes casos. São considerações de natureza económica, construtiva ou dinâmica que tornam uma solução mais interessante que a outra.

Íman fixo

A figura 2.20 mostra um exemplo de um motor oscilante relutante polarizado. O íman e as bobinas são colocados no mesmo suporte. A distribuição respectiva dos fluxos devidos ao íman e às bobinas está esquematizada no desenho. Um íman tubular, no caso da estrutura cilíndrica deste transdutor, é caro ou difícil de obter. Neste caso será preferível a solução da figura 2.21.

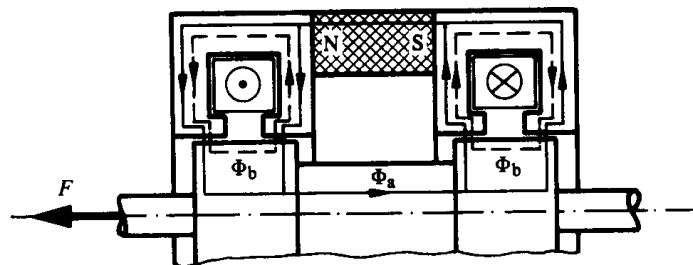


Fig. 2.20 Motor oscilante de íman fixo

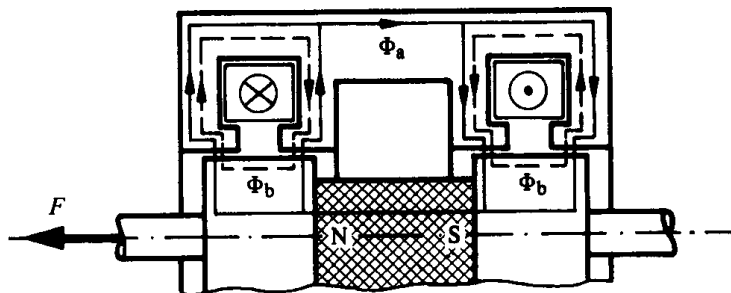


Fig. 2.21 Motor oscilante de íman móvel

Íman móvel

A figura 2.21 mostra o mesmo motor com um íman ligado à parte móvel. A distribuição de fluxo está representada segundo a mesma convenção da figura 2.20.

Exemplo 13: Electroímans polarizados

Um electroíman que contenha um íman permanente no seu circuito magnético é caracterizado por uma força de manutenção sem corrente.

A figura 2.22 mostra o princípio aplicado a um contactor. O íman permite a manutenção do núcleo móvel em posição fechado mesmo quando a corrente da bobina for nula. É necessário uma excitação negativa para provocar a descolagem. Uma excitação positiva assegura uma atracção ainda maior.

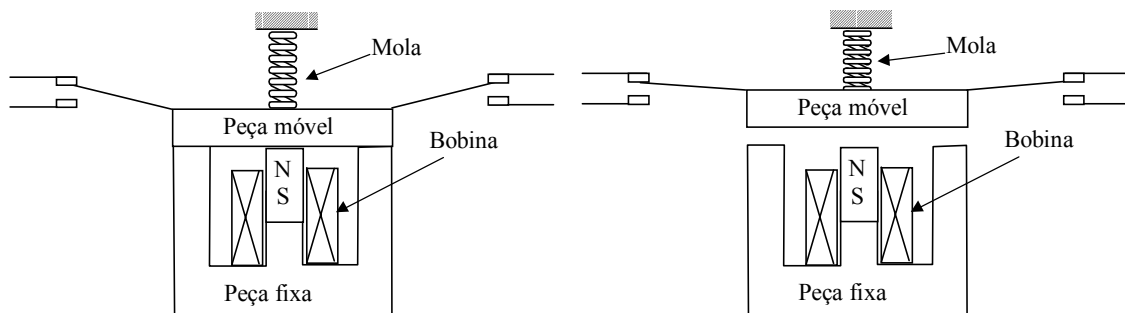


Fig. 2.22. Electroíman polarizado.

Estes sistemas são aplicados, geralmente, na abertura ou fecho de contactos. Podem ser aplicados em electroválvulas, em sistemas de comando, etc.

Exemplo 14: Motores oscilantes

A figura 2.23 apresenta uma disposição relativa possível para o motor oscilante, aplicada a uma campainha eléctrica.

O movimento da parte móvel assegura a abertura e fecho de contactos o que provoca a inversão da corrente na bobina de excitação. Trata-se de um sistema auto-pilotado em posição.

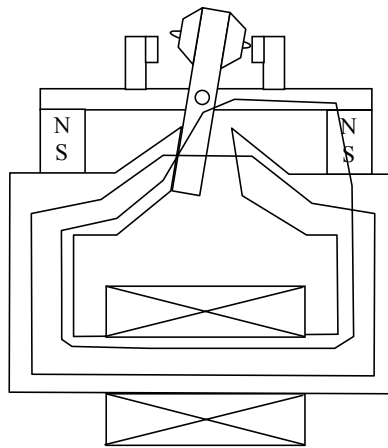


Fig. 2.23. Motor oscilante.

Exemplo 15: Motores de binário

A técnica relutante polarizada presta-se bem à realização de motores que apresentam um binário importante com uma amplitude de movimento inferior a uma volta.

Estes motores são designados por motores de binário. A figura 2.24 apresenta um exemplo. Estes motores são frequentemente utilizados em estruturas de regulação principalmente em electroímans.

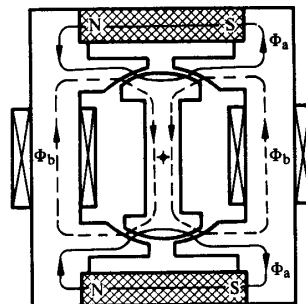


Fig. 2.24. Motor de binário

2.5. Sistemas Electrostáticos

Generalidades

Ao contrário dos sistemas que se acabam de descrever, cujo funcionamento é baseado na utilização do campo magnético como campo de acoplamento, os sistemas electrostáticos são baseados no campo eléctrico. Embora muito menos frequentes e de muito menor variedade, os sistemas electrostáticos tem vindo a ganhar uma importância cada vez maior. A razão desta menor utilização está relacionada com a amplitude da força que se pode extrair destes dispositivos quando comparados com os dispositivos baseados no campo magnético.

Equações

Estes sistemas também podem ser estudados a partir da função de estado *co-energia eléctrica*. A função co-energia eléctrica é uma função dos potenciais e das coordenadas de posição. Para o caso em que se tem duas diferenças de potencial u_1 e u_2 e uma coordenada de posição θ , tem-se

$$W'_e = W'_e(u_1, u_2, \theta) \quad (2.24)$$

A co-energia eléctrica escreve-se

$$W'_e = \frac{1}{2}C_1u_1^2 + C_{12}u_1u_2 + \frac{1}{2}C_2u_2^2 \quad (2.25)$$

Da analogia com os sistemas magnéticos, tira-se:

$$F_{em} = \frac{\partial W'_e}{\partial \theta} \quad (2.26)$$

$$Q_1 = \frac{\partial W'_e}{\partial u_1} \quad Q_2 = \frac{\partial W'_e}{\partial u_2} \quad (2.27)$$

Um sistema electrostático poderá ser modelizado do seguinte modo:

1. Equação do binário

$$M_{em} = \frac{1}{2}u_1^2 \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + u_1u_2 \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}u_2^2 \frac{\partial C_2}{\partial \theta} \quad (2.28)$$

2. Equações eléctricas

A relação entre as cargas e as potenciais, será:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

em que os coeficientes de capacidade serão função da coordenada de posição θ .

A equação da conservação da carga permite escrever:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

As equações 2.28 e 2.30 são as equações procuradas e permitem modelizar um sistema electrostático com dois graus de liberdade eléctricos e um grau de liberdade mecânico, neste caso uma coordenada de posição angular. O formalismo não se altera se em vez de um sistema angular de coordenada de posição se considerar um sistema linear de coordenada de posição x . Assim, em vez do binário teremos uma força e em vez de θ teremos x .

Um grande número de dispositivos tem apenas um grau de liberdade eléctrico. As equações simplificam-se neste caso. Seja, por exemplo, um dispositivo de movimento linear. Tem-se:

$$W'_e = \frac{1}{2} u^2 C(x) \quad (2.31)$$

O modelo será

$$i = C(x) \frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{dC}{dx} u$$

$$F = \frac{1}{2} u^2 \frac{dC}{dx} \quad (2.32)$$

Justifica-se a derivada total da capacidade em ordem à posição pelo facto de a capacidade ser uma função que depende apenas da posição.

Propriedades gerais

Os sistemas electrostáticos são caracterizados pelas seguintes propriedades principais:

1. A força (ou binário) é extremamente reduzida.

2. Não tem alguns problemas dos sistemas electromagnéticos isto é: linearidade do circuito magnético, saturação e histerese.
3. Prestam-se facilmente à miniaturização.

Exemplo 16: Voltímetro Electrostático

O voltímetro electrostático é um sistema com um par de terminais eléctricos. É regido pelas equações 2.32 onde se tem normalmente $dC/dx = \text{cte}$.

A parte móvel encontra-se ligada a uma mola. A posição de equilíbrio do ponteiro é determinada quando a força de origem electrostática equilibra a força da mola. São voltímetros de verdadeiro valor eficaz, isto é medem o valor eficaz da tensão independentemente da sua forma de onda. São caracterizados por uma impedância interna extremamente elevada.

Exemplo 17: Motor passo-a-passo electrostático

A figura 2.25 apresenta o esquema de um motor de passo-a-passo miniaturizado.

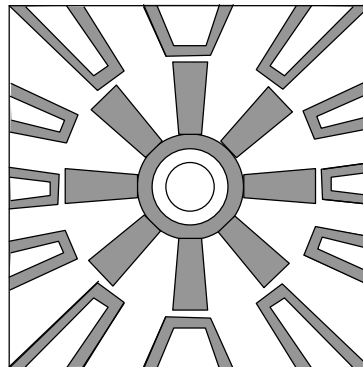


Fig. 2.25. Esquema de um motor passo-a-passo miniaturizado

Este tipo de motor explora a escala favorável das forças electrostáticas no domínio do micrómetro. O rotor de oito dentes roda em torno do centro até 2500 rpm respondendo a tensões aplicadas sequencialmente aos pólos do estator de modo a criar um campo electrostático girante. O “entreferro” é de 2 μm . Tem um binário máximo de 12 pNm com uma tensão de excitação de 100 V.

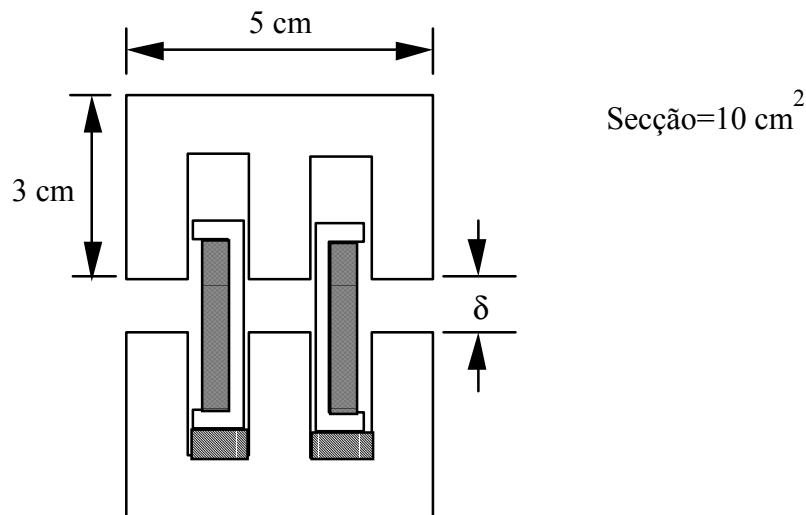
Exemplo 18: Sensores electrostáticos

São numerosos os sensores de origem electrostática. Desde os detectores de posição, acelerómetros até aos altifalantes e microfones, uma variedade imensa de

dispositivos está hoje a ser desenvolvida vencendo algumas limitações dos dispositivos de origem magnética.

Exercícios de Revisão:**I**

Um contactor tem o circuito magnético indicado na figura. A bobina tem 1000 espiras e uma resistência de 100Ω .

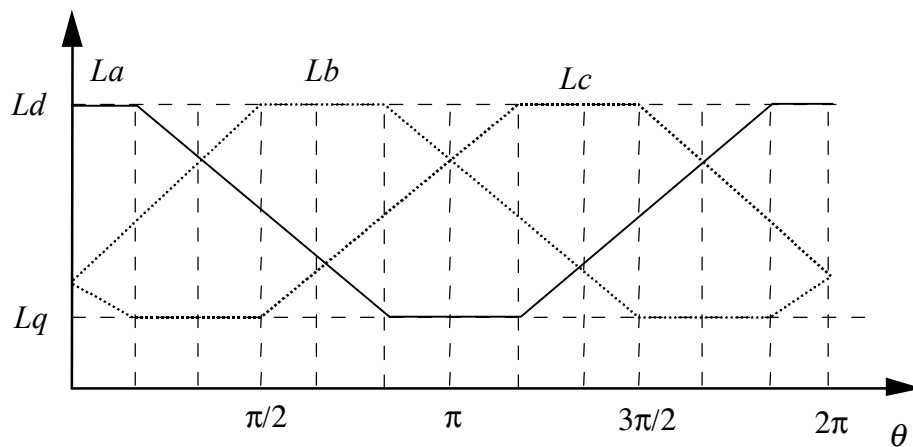


Fazendo as simplificações que achar necessárias, determine:

1. A expressão da relutância magnética do circuito.
2. A expressão da energia magnética armazenada no sistema.
3. O valor da força e do seu sentido em função de δ .
4. Este contactor é alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz igual a 230V e de frequência igual a 500 Hz. Determine a expressão da força em função da posição da armadura. (A altura máxima da armadura é 0,5cm).
5. Alimente-se agora a bobina deste contactor com uma fonte de tensão contínua U . Determine a expressão da força em função da posição e do valor da tensão aplicada U .
6. Entre a armadura e a peça fixa encontra-se uma mola que se comprime quando a armadura se fecha. Escreva as equações que permitam determinar o regime transitório do fecho da armadura nas situações das questões 4 e 5. Arbitre um valor para o coeficiente de elasticidade da mola.

II

Um motor passo-a-passo de relutância, de 3 fases, tem os coeficientes de indução própria com a forma indicada na figura. Não se sabe como é que variam os coeficientes de indução mútua. Pretende-se alimentar este sistema com um conversor de corrente comutado. A partir de uma fonte de corrente este conversor faz circular a corrente por uma fase apenas em cada instante, trocando sucessivamente a corrente de fase em instantes bem definidos. Admite-se que a comutação é instantânea.



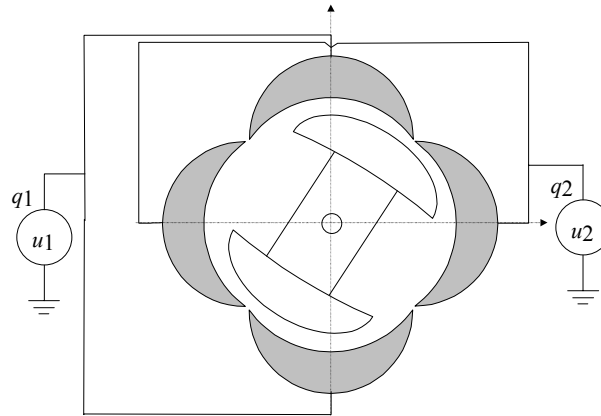
- Diga em que instantes em função da posição θ ligaria a corrente a cada uma das fases se desejar que o sistema funcione como motor.
- Calcule o valor do binário em função da corrente de alimentação e da lei de comutação que determinou na alínea a).
- Determine as equações eléctricas do sistema para a lei de comutação da alínea a).
- Será que este sistema também pode funcionar como gerador? Justifique a sua resposta.

III

Considere a máquina rotativa esquematizada em baixo. O rotor da máquina é constituído por um par de condutores ligados à terra. Dois pares de condutores fixos, formam o estator; um dos pares está ao potencial u_1 relativamente à terra, admitindo uma carga total q_1 ; o outro está ao potencial u_2 em relação à terra, admitindo a carga

total q_2 . Por construção tem-se que: $q_1 = C_0 (1 + \cos 2\theta) u_1$ e $q_2 = C_0 (1 - \cos 2\theta) u_2$ sendo C_0 uma constante positiva.

Indique todos os cálculos e hipóteses que vier a efectuar.



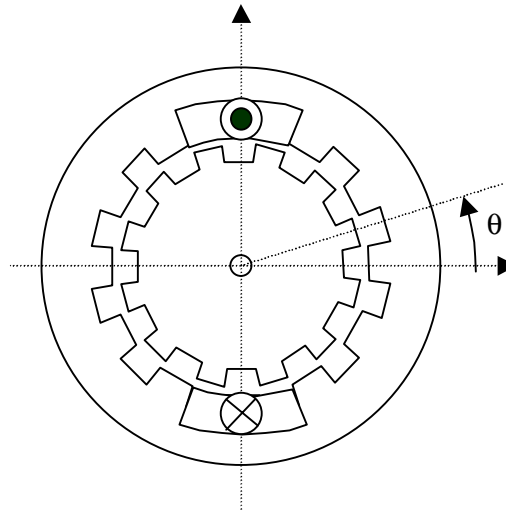
- Qual é o binário de origem eléctrica exercido sobre o rotor na direcção de θ .
- Sendo $u_1 = U_0 \cos \omega t$ e $u_2 = U_0 \sin \omega t$ e $\theta = \omega t + \theta_0$, calcule a expressão do binário em função do tempo.
- Calcule o valor médio do binário no tempo. Interprete o resultado.
- Resolva as alíneas a), b) e c) admitindo agora que:

$$q_1 = (C_0 + C_1 \cos 2\theta) u_1 + C_1 \sin 2\theta u_2$$

$$q_2 = C_1 \sin 2\theta u_1 + (C_0 - C_1 \cos 2\theta) u_2$$

IV

A figura mostra uma máquina síncrona monofásica de relutância. O rotor tem k dentes (o desenho é feito para $k = 12$). O estator tem uma fase mostrada em corte transversal pelos pontos e cruzes. O rotor não tem enrolamentos.



Admita que o coeficiente de auto indução do enrolamento do estator como função da posição angular θ do rotor é dado pela expressão:

$$L_s = L_0 + L_k \cos k \theta$$

onde L_0 e L_k são constantes. Admita também que a corrente do estator é dada por:

$$i = I \cos \omega t$$

a) Obtenha uma expressão para a velocidade em radianos por segundo para a qual o motor desenvolve binário em valor médio não nulo. Exprima a velocidade em termos da frequência angular ω , da corrente I , e do número de dentes k .

b) Obtenha também uma expressão para o binário médio para esta velocidade síncrona em termos de corrente I , dos coeficientes L_0 e/ou L_k , e de outras variáveis que necessitar.

Capítulo 3

Modelos Dinâmicos das Máquinas Eléctricas de Corrente Alternada

3.1 Introdução

Neste capítulo obtêm-se os modelos das máquinas eléctricas de corrente alternada válidos em regime estacionário e em regime transitório. Posteriormente estes modelos serão utilizados para a obtenção e análise da resposta dinâmica destes sistemas em cadeia aberta e em cadeia fechada.

O estudo do regime transitório das Máquinas Eléctricas é feito utilizando a teoria dos circuitos e admitindo certas hipóteses simplificativas:

1. O circuito magnético é considerado linear, isto é, despreza-se a saturação magnética e a histerese.
2. Consideram-se distribuições sinusoidais de ondas de f.m.m. e enrolamentos distribuídos sinusoidalmente.
3. Desprezam-se as perdas no ferro.

Dada a complexidade formal dos modelos das máquinas de corrente alternada, como se verá na secção 3.2, este tema é abordado de uma forma progressiva. Assim começa-se por substituir os enrolamentos trifásicos por enrolamentos bifásicos equivalentes o que dá origem à necessidade de introduzir a teoria das transformações. Esta teoria é apresentada de uma forma elementar na secção 3 onde se mostra que para além das máquinas eléctricas, a teoria das transformações também pode ser aplicada noutras áreas da Engenharia Electrotécnica como é o caso da teoria dos circuitos. A seguir apresenta-se a transformação de dois eixos de potência invariante que designamos neste texto por transformação de Concordia. Esta transformação transforma os 3 enrolamentos de um sistema trifásico em dois enrolamentos equivalentes.

A aplicação da transformação de Concordia às máquinas assíncronas e síncronas é feita com todo o detalhe. Para uma melhor interpretação física, as máquinas assíncrona e

síncronas de pólos lisos são abordadas simultaneamente a partir de um modelo de conversor rotativo com quatro circuitos eléctricos ligados magneticamente. Este modelo pode ser interpretado de duas formas. Por um lado pode ser interpretado como um sistema físico em que existem dois enrolamentos em quadratura no estator e igualmente dois enrolamentos em quadratura no rotor. Por outro lado pode ser visto como o equivalente em coordenadas α, β de uma máquina de indução trifásica.

Depois da apresentação dos modelos das máquinas em coordenadas α, β da máquina de pólos salientes, apresenta-se a transformação $\alpha, \beta \rightarrow dq$ que se vai aplicar ao referido modelo. Esta transformação não representa mais do que uma simples mudança de referencial. Obtêm-se assim os modelos em coordenadas de Blondel-Park das Máquinas assíncronas e das máquinas síncronas. Por fim, na secção 10 faz-se a introdução da notação complexa. Esta notação não introduz nenhum conceito novo nos modelos das máquinas em coordenadas $\alpha\beta$ ou dq . Representa uma passagem dos modelos para variáveis no plano de Argand o que tem algumas vantagens na análise e interpretação física.

No sentido de simplificar a exposição adopta-se a convenção motor e o ângulo de posição θ é medido em radianos eléctricos.

3.2 Coeficientes de indução das Máquinas Eléctricas

A - Máquina Assíncrona

Coeficientes de auto-indução

Como estas máquinas tem um entreferro constante, os valores dos coeficientes de auto-indução dos enrolamentos do estator, bem como os do rotor não dependem da posição θ do rotor. Atendendo à simetria, pode concluir-se que os três coeficientes de auto-indução do estator são todos iguais. O mesmo se passa com os coeficientes de auto-indução dos enrolamentos do rotor.

Coeficientes de indução mútua entre enrolamentos do mesmo lado

Como a posição relativa entre estes enrolamentos é fixa, isto é, não depende da posição do rotor, estes coeficientes também são constantes tal como os coeficientes de auto-indução. Atendendo à simetria, enrolamentos desfasados dois a dois de 120° , pode afirmar-se que os seus valores serão todos iguais. Como o ângulo entre estes

enrolamentos é superior a 90° , o valor destes coeficientes é negativo. As matrizes correspondentes serão:

$$\mathbf{L}_E = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{ss} & M_{ss} \\ M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \\ M_{ss} & M_{ss} & L_{ss} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_R = \begin{bmatrix} L_{rr} & M_{rr} & M_{rr} \\ M_{rr} & L_{rr} & M_{rr} \\ M_{rr} & M_{rr} & L_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

O índice s refere-se ao estator e o índice r ao rotor. Os coeficientes de auto-indução são representados pela letra L e os coeficientes de indução mútua pela letra M .

Coefficientes de indução mútua entre enrolamentos do estator e enrolamentos do rotor.

A forma dos coeficientes de indução mútua entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos do rotor são de importância fundamental no funcionamento da máquina de indução.

Estes coeficientes de indução variam com a posição do rotor e são uma função periódica de θ . A figura 3.1 apresenta a disposição relativa dos vários enrolamentos numa máquina de indução de rotor bobinado. A coordenada de posição θ (ângulo eléctrico $\theta = p\theta_m$) é definida pelo ângulo de defasagem entre os enrolamentos 1 e 4.

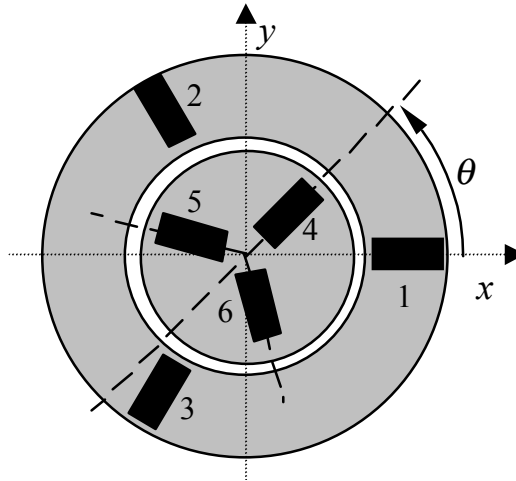
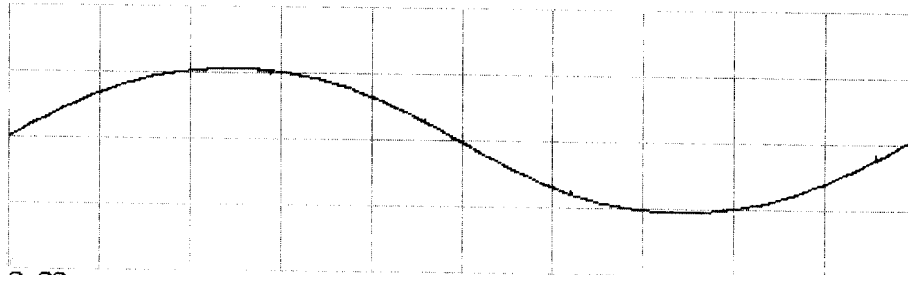
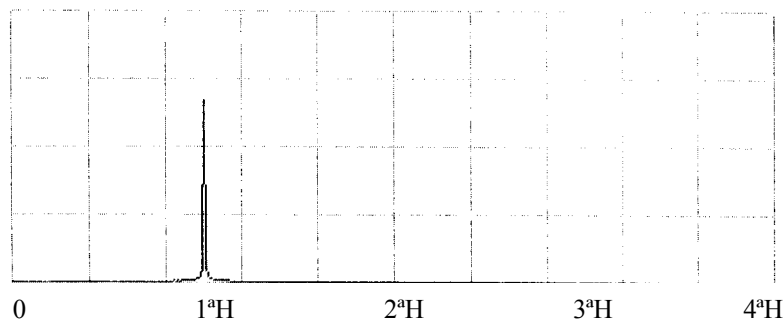


Fig. 3.1 Disposição relativa entre os enrolamentos da máquina de indução



a) Andamento do coeficiente de indução mútua.



b) Análise harmónica

Fig. 3.2 Análise harmónica do coeficiente de indução mútua entre um enrolamento do estator e um enrolamento do rotor.

A figura 3.2 apresenta o andamento de um destes coeficientes determinado experimentalmente utilizando-se para isso uma máquina de 1.5kW. O método utilizado na determinação destes coeficientes vem descrito no anexo 1 deste capítulo.

Pode verificar-se naquela figura que estes coeficientes são aproximadamente sinusoidais. São funções coseno do ângulo entre os dois enrolamentos respectivos. Atendendo às convenções da figura 3.1, tira-se:

$$M_{1,4} = M_{sr} \cos \theta + M_3 \cos 3\theta \quad (3.2)$$

Na equação 3.2 considera-se também a 3ª harmónica pois o método que utilizamos no laboratório não permite visualizar harmónicas de ordem múltiplas de 3. No caso geral existirão harmónicas ímpares.

Atendendo à simetria, os ângulos entre os enrolamentos serão:

	4	5	6
1	θ	$\theta + \frac{2\pi}{3}$	$\theta + \frac{4\pi}{3}$
2	$\theta + \frac{4\pi}{3}$	θ	$\theta + \frac{2\pi}{3}$
3	$\theta + \frac{2\pi}{3}$	$\theta + \frac{4\pi}{3}$	θ

e como:

$$\cos 3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 3\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos 3\theta \quad (3.3)$$

o termo correspondente à terceira harmónica será sempre $M_3 \cos 3\theta$ para todos os coeficientes.

Se se convencionar escrever:

$$\theta_2 = \theta + \frac{2\pi}{3} \quad \theta_3 = \theta + \frac{4\pi}{3}, \quad (3.4)$$

a matriz dos coeficientes de indução mútua entre o estator e o rotor escreve-se:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{sr} \cos \theta & M_{sr} \cos \theta_2 & M_{sr} \cos \theta_3 \\ M_{sr} \cos \theta_3 & M_{sr} \cos \theta & M_{sr} \cos \theta_2 \\ M_{sr} \cos \theta_2 & M_{sr} \cos \theta_3 & M_{sr} \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta \\ M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta \\ M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta & M_3 \cos 3\theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Modelo da máquina de indução em grandezas abc

As 3^{as} harmónicas dos coeficientes de indução são praticamente desprezáveis. Normalmente aceita-se como válido o modelo que considere sinusoidais os coeficientes de indução mútua entre o estator e o rotor. Mais à frente ver-se-á qual a influência dos termos da terceira harmónica. Com esta simplificação, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{ss} & M_{ss} & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 \\ M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 \\ M_{ss} & M_{ss} & L_{ss} & M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta \\ M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta_2 & L_{rr} & M_{rr} & M_{rr} \\ M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{rr} & L_{rr} & M_{rr} \\ M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta & M_{rr} & M_{rr} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A partir das equações 3.6 que relacionam os fluxos ligados com as correntes obtém-se o sistema de equações diferenciais que constitui o modelo da máquina como se viu no capítulo 1.

Como a relação entre os fluxos e as correntes 3.6, é uma função não linear da posição angular do rotor θ , o modelo matemático desta máquina é constituído por um conjunto de equações diferenciais não lineares.

B - Máquina Síncrona de pólos salientes

Considere-se uma máquina síncrona de pólos salientes. Para simplificar vamos considerar uma máquina sem enrolamentos amortecedores. A representação simbólica dos enrolamentos desta máquina encontra-se na figura 3.3.

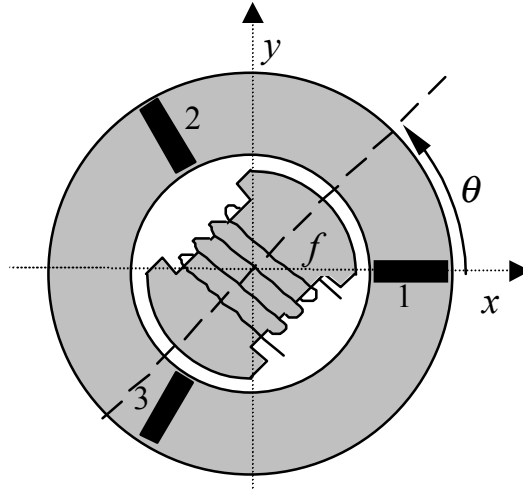


Fig. 3.3. Representação de uma Máquina Síncrona de pólos Salientes em *abc*.

Indutâncias próprias

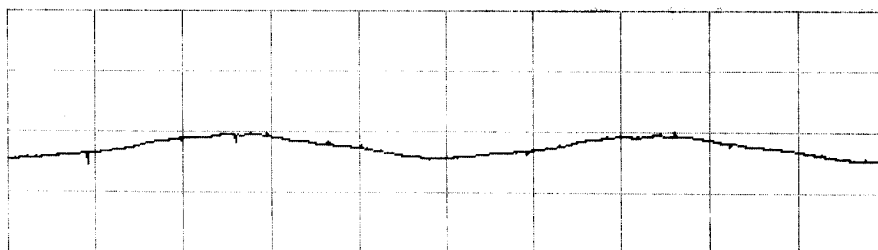
A indutância própria do enrolamento de excitação é constante e independente da posição angular do rotor θ . Com efeito, uma vez que a periferia do estator é cilíndrica, o circuito magnético visto pelo enrolamento do rotor é constante.

A maior dificuldade na análise das máquinas de pólos salientes constitui a forma dos coeficientes de auto-indução do estator e de indução mútua estator-estator.

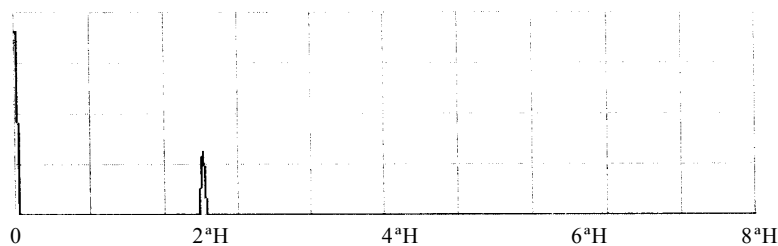
O entreferro visto por estes enrolamentos em cada ponto da periferia é heterogéneo e varia fortemente com a posição do rotor θ .

As funções dos coeficientes de auto-indução são funções pares, isto é, funções coseno da posição θ . Uma vez que o circuito do ferro do pólo norte é, aparte pequenos detalhes como o magnetismo residual, indistinguível do circuito do ferro do pólo sul, apenas harmónicas de ordem par estarão presentes na sua equação.

Segundo Charles V. Jones, é necessário considerar todos os termos até à quarta harmónica. Contudo é normalmente aceite a aproximação que consiste em utilizar apenas o termo constante (de ordem zero) e o termo de ordem 2. A figura 3.4 apresenta o andamento e a análise harmónica destes coeficientes. Esta figura foi obtida no Laboratório utilizando o método que temos vindo a referir. Estes coeficientes de indução dizem respeito a uma máquina de 1.5kW.



a) Andamento do coeficiente de indução própria.



b) Análise harmónica

Fig. 3.4 Indutância própria estator-estator

Atendendo às considerações atrás referidas, tem-se:

$$L_{11} = L_a + L_b \cos 2\theta + L_c \cos 4\theta \quad (3.7a)$$

$$L_{22} = L_a + L_b \cos 2\theta_3 + L_c \cos 4\theta_3 \quad (3.7b)$$

$$L_{33} = L_a + L_b \cos 2\theta_2 + L_c \cos 4\theta_2 \quad (3.7c)$$

Indutância mútua, estator-estator

Pelo facto de existir saliência na peça polar do rotor, os coeficientes de indução mútua não terão a forma simples (constantes) como têm na máquina assíncrona.

Mais uma vez se deverão esperar funções pares e por considerações de simetria deverá adiantar-se que, por exemplo, a indutância mútua entre as fases 1 e 2 deverá ter um mínimo quando o rotor se encontra alinhado com a fase 3. A figura 3.5 apresenta resultados experimentais obtidos sobre a mesma máquina. Estes resultados experimentais não permitem observar o termo constante (de ordem zero).

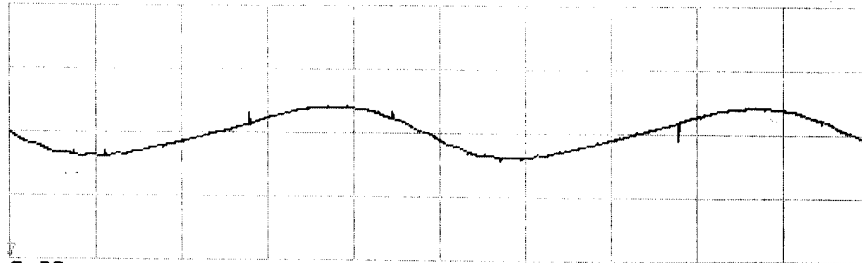
A forma dos coeficientes de indução mútua será:

$$M_{12} = M_a + M_b \cos 2\theta_2 + M_c \cos 4\theta_2 \quad (3.8a)$$

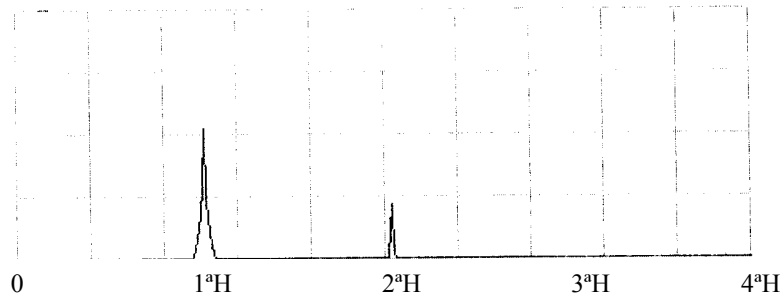
$$M_{23} = M_a + M_b \cos 2\theta + M_c \cos 4\theta \quad (3.8b)$$

$$M_{31} = M_a + M_b \cos 2\theta_3 + M_c \cos 4\theta_3 \quad (3.8c)$$

em que M_a, M_c são valores negativos.



a) Andamento do coeficiente de indução mútua.



b) Análise harmónica

Fig. 3.5 Indutância mútua estator-estator

Indutâncias mútuas entre o estator e o rotor

Resultados experimentais mostram que numa máquina síncrona típica, as indutâncias mútuas tem a forma simples:

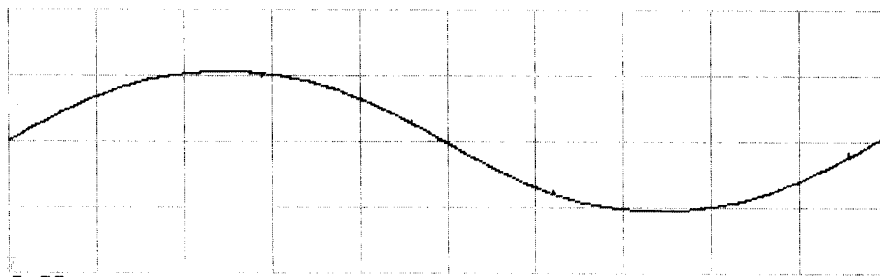
$$M_{1f} = M_F \cos \theta + M_{F3} \cos 3\theta \quad (3.9a)$$

$$M_{2f} = M_F \cos \theta_3 + M_{F3} \cos 3\theta \quad (3.9b)$$

$$M_{3f} = M_F \cos \theta_2 + M_{F3} \cos 3\theta \quad (3.9c)$$

O conteúdo harmónico é normalmente desprezável e pode considerar-se apenas a primeira harmónica.

A explicação deste facto reside em que uma das mais importantes preocupações do projectista é produzir uma máquina com uma tensão sinusoidal no induzido. Estas indutâncias determinam a forma de onda em vazio da máquina e numa máquina bem projectada, a sua variação com a posição do rotor deve ser aproximadamente sinusoidal.



a) Andamento do coeficiente de indução mútua.

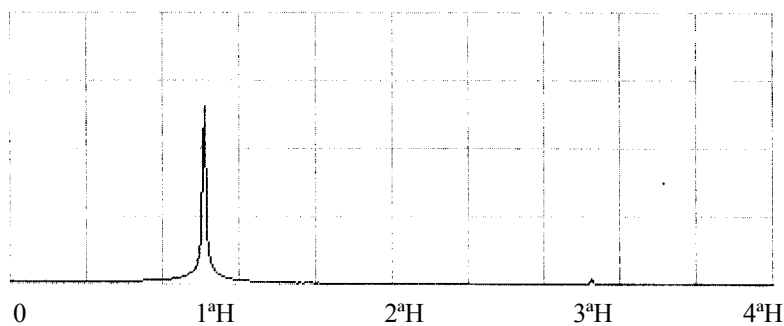


Fig. 3.6. Análise harmónica de indutância mútua estator-rotor .

Modelo das Máquinas Síncronas

O modelo normalmente utilizado para o estudo das máquinas síncronas despreza as harmónicas de ordem 4 nos coeficientes de indução relativos ao estator e considera apenas a primeira harmónica nos coeficientes de indução mútua entre o estator e do rotor. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a + L_b \cos 2\theta & M_a + M_b \cos 2\theta_2 & M_a + M_b \cos 2\theta_3 & M_F \cos \theta \\ M_a + M_b \cos 2\theta_2 & L_a + L_b \cos 2\theta_3 & M_a + M_b \cos 2\theta_2 & M_F \cos \theta_3 \\ M_a + M_b \cos 2\theta_3 & M_a + M_b \cos 2\theta & L_a + L_b \cos 2\theta_2 & M_F \cos \theta_2 \\ \hline M_F \cos \theta & M_F \cos \theta_3 & M_F \cos \theta_2 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Tal como na máquina de indução, pode obter-se o modelo de máquina síncrona a partir das equações 3.10.

3.3 Transformações de variáveis

Introdução

A ideia chave da teoria unificada das Máquinas Eléctricas é o conceito de transformação. As transformações ocorrem em quase todos os ramos das Matemáticas aplicadas, desde a simples mudança de eixos na geometria analítica até à transformação das componentes simétricas desenvolvida por Fortescue e a transformação dos eixos dq desenvolvida por Blondel e Park para resolver o problema da modelização da Máquina Síncrona.

Os modelos matemáticos das máquinas eléctricas têm a forma matricial apresentada na equação 3.11.

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{I} + \dot{\theta} \frac{d\mathbf{L}}{dt} \mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad (3.11a)$$

$$M_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \left[\frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \right] \mathbf{I} \quad (3.11b)$$

Normalmente conhece-se a matriz \mathbf{U} e pretende determinar-se a matriz \mathbf{I} . No caso geral, estas matrizes são variáveis no tempo tal como a matriz \mathbf{L} .

O objectivo da aplicação de uma transformação de variáveis é de simplificar o modelo matemático. Dito de outra forma, é partir do modelo 3.11 e chegar a um outro modelo com novas variáveis escrito na mesma forma mas em que as matrizes são mais simples. Designemos por (') as novas variáveis e novas matrizes.

Consideremos uma mudança de variáveis definida pelas matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} onde

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q} \mathbf{I}' \quad \mathbf{U}' = \mathbf{P} \mathbf{U} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{P} \boldsymbol{\psi} \quad (3.12)$$

Substituindo na expressão 3.12 \mathbf{I} por $\mathbf{Q}\mathbf{I}'$ e multiplicando à esquerda por \mathbf{P} obtém-se:

$$\mathbf{P} \mathbf{U} = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{I}' + \mathbf{P} \left[\dot{\theta} \frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \right] \mathbf{Q} \mathbf{I}' + \mathbf{P} \mathbf{L} \left[\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{I}' + \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{I}'}{dt} \right] \quad (3.13)$$

Para que esta equação seja formalmente idêntica à equação 3.11a deverá ter-se:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{Q} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{Q} \quad (3.14b)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'' = \mathbf{P} \left[\frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \right] \mathbf{Q} + \mathbf{P} \mathbf{L} \left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\theta} \right] \quad (3.15)$$

Assim teremos para o novo modelo.

$$\mathbf{U}' = \mathbf{R}'\mathbf{I}' + \dot{\theta} \mathbf{G}'\mathbf{I}' + \mathbf{L}' \frac{d\mathbf{I}'}{dt} \quad (3.16)$$

Para a matriz \mathbf{G} contribui a matriz que resulta da derivada de \mathbf{L} em ordem à posição do rotor e da derivada da matriz de transformação \mathbf{Q} .

As equações 3.12 relacionam as variáveis originais (desconhecidas) com as variáveis novas que deverão ser conhecidas depois de resolvido o sistema 3.16. Para que este sistema possa ser resolvido é necessário conhecer primeiro a matriz \mathbf{U}' . Esta matriz \mathbf{U}' é determinada a partir das matrizes \mathbf{U} e \mathbf{P} que são conhecidas.

Condição de invariância de potência

A determinação da relação entre as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} é feita baseada num critério de importância capital: a potência no sistema 3.12 deverá ser igual à potência no sistema 3.12. Assim, tem-se

$$p = [u_1 i_1 + u_2 i_2 + \dots + u_n i_n] = \mathbf{U}^T \mathbf{I} \quad \text{e} \quad p' = \mathbf{U}'^T \mathbf{I}' \quad (3.17)$$

aplicando a transformação 3.13 obtém-se

$$p = \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{I}' = p' = \mathbf{U}'^T \mathbf{I}' \quad (3.18)$$

donde

$$\mathbf{U}'^T = \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \quad \mathbf{U}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{U} \quad \text{donde} \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \quad (3.19)$$

A equação 3.19 dá-nos a relação procurada. A matriz \mathbf{P} deverá ser igual à transposta de \mathbf{Q} para que a potência se mantenha inalterável na transformação.

Embora nem todos os autores imponham esta condição, neste curso vamos manter, por agora, este resultado em todas as transformações que efectuarmos.

As equações 3.12 e 3.19 definem uma transformação de variáveis em que a potência nos dois sistemas é idêntica. Note-se que a matriz \mathbf{Q} pode não ser uma matriz

quadrada. No caso em que esta matriz seja uma matriz rectangular o número de equações dos dois modelos será diferente.

Quando na matriz de transformação existirem números complexos, faz-se a potência complexa invariante, isto é, a potência activa e a potência reactiva. Donde:

$$\bar{S} = U^{T*} I = \bar{S} \quad (3.20)$$

Como

$$U^{T*} I' = U^{T*} I = U^{T*} Q I'$$

donde

$$U^{T*} = U^{T*} Q$$

Tomando os conjugados $U^{T*} = U^T Q^*$ e transpondo, obtém-se:

$$U' = Q^{T*} U \quad (3.21)$$

Conclusão: Quando a matriz de transformação for complexa, para que a condição de invariância de potência seja satisfeita, para a matriz das tensões deverá ter-se a matriz transposta da conjugada (transconjugada).

Transformação da expressão do binário

Aplicando a expressão 3.11 à equação 3.11b e tendo em conta 3.16 numa transformação de potência invariante, tira-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} I'^T G' I' \quad (3.22)$$

Caso das transformações cujas matrizes não variam no tempo

Se a matriz de transformação Q não variar no tempo, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (3.23)$$

As equações do modelo nas novas variáveis podem pôr-se na forma:

$$U' = R' I' + \frac{d}{dt} \Psi' \quad \text{onde} \quad \Psi' = L' I' \quad (3.24)$$

O modelo obtido após a transformação tem a mesma forma do modelo primitivo não aparecendo o termo extra relativo à matriz G'' .

Exemplo 3.1 "Aplicação da matriz de conexão de Kron no cálculo de um circuito eléctrico".

A figura 3.7 apresenta um circuito eléctrico realizado com 4 ramos.

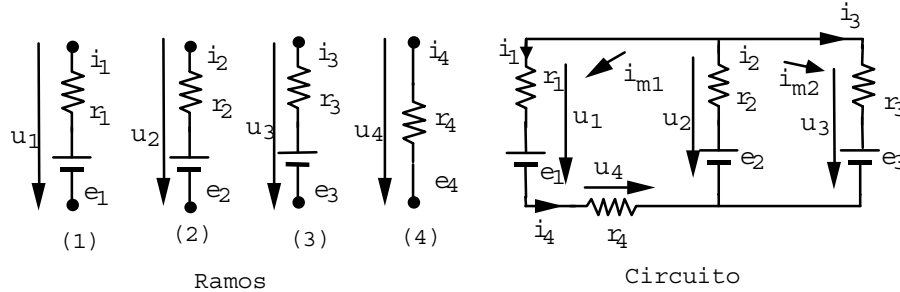


Fig. 3.7 Circuito Eléctrico

O modelo matemático relativo aos 4 ramos pode colocar-se na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As forças electromotrices e_1 , e_2 e e_3 representam as entradas do sistema e as correntes i_1 , i_2 , i_3 e i_4 as incógnitas a calcular.

Se se definirem as correntes de malha i_{m1} e i_{m2} como se mostra na figura 3.7, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix}$$

A matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz de conexão de Kron. Esta matriz também é designada por matriz de ligação. Pode ser interpretada como uma matriz de transformação que transforma o modelo primitivo no circuito da figura 3.7.

A - Cálculo da matriz das tensões:

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{C}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_4 \\ -u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz $[\mathbf{U}_m]$ representam a soma das tensões ao longo

das malhas 1 e 2. São, pela lei das malhas, iguais a zero.

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B - Cálculo da matriz das forças electromotrizes

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{C}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ -e_2 + e_3 \end{bmatrix}$$

C - Cálculo da matriz das resistências

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{R} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ -r_2 & -r_2 \\ 0 & r_3 \\ r_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 + r_4 & r_2 \\ r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Modelo em variáveis "correntes de malha"

O modelo transformado será:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 + r_4 & r_2 \\ r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ -e_2 + e_3 \end{bmatrix}$$

Note-se que estas equações estão de acordo com as equações escritas através do método das malhas.

Processo de cálculo

Sabe-se e_1 , e_2 , e e_3

Pretende-se saber i_1 , i_2 , i_3 e i_4

1. Calcula-se as forças electromotrizes de malha

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{C}^T \mathbf{E}$$

2. Resolve-se o sistema de equações transformado e obtém-se as correntes de malha $[i_m]$

3. A partir da matriz de transformação obtém-se as correntes nos ramos

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{I}_m$$

Composição de transformações

Considere-se uma transformação \mathbf{C} definida por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{I}'$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{C}^T \mathbf{U}$$

Se as novas variáveis forem sujeitas a nova transformação \mathbf{T} , tem-se:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \mathbf{I}''$$

$$\mathbf{U}'' = \mathbf{T}^T \mathbf{U}'$$

e

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{I}''$$

$$\mathbf{U}'' = \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{C} \mathbf{T}^T$$

A transformação equivalente é dada por:

$$\mathbf{C}_{eq} = \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (3.25)$$

A equação 3.25 permite concluir que a matriz de transformação equivalente à aplicação sucessiva de duas transformações é dada pelo produto matricial das matrizes que definem as duas transformações. Este produto matricial é feito pela ordem de aplicação das duas transformações.

Aplicação de uma transformação com matrizes diferentes ao estator e ao rotor.

Consideremos como exemplo a matriz dos coeficientes de indução de uma máquina de indução, equações 3.6. Atendendo às definições das matrizes \mathbf{L}_E e \mathbf{L}_R (3.1) bem como da matriz \mathbf{M} (3.5) e considerando que a matriz de transformação é composta de duas matrizes de transformação, que poderão ser ou não diferentes, uma aplicada às grandezas do estator \mathbf{C}_E e outra aplicada às grandezas do rotor \mathbf{C}_R , tem-se para a matriz dos coeficientes de indução:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_E & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_E \mathbf{C}_E & \mathbf{M} \mathbf{C}_R \\ \mathbf{M}^T \mathbf{C}_E & \mathbf{L}_R \mathbf{C}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E^T \mathbf{L}_E \mathbf{C}_E & \mathbf{C}_E^T \mathbf{M} \mathbf{C}_R \\ \mathbf{C}_R^T \mathbf{M}^T \mathbf{C}_E & \mathbf{C}_R^T \mathbf{L}_R \mathbf{C}_R \end{bmatrix} \quad (3.26) \end{aligned}$$

O resultado expresso na expressão 3.26 permite a execução dos cálculos de uma forma mais ordenada o que é vantajoso, pois apesar de simples, estes cálculos são normalmente muito extensos.

Classificação das principais transformações.

Verificamos que a aplicação de uma transformação de variáveis definida pelas matrizes **P** e **Q** definia novas matrizes **R'** e **L'** dadas pelas equações 3.14 que se repetem abaixo:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{Q}$$

Este tipo de transformações é o caso mais geral de transformações matriciais. Existem vários tipos de transformações definidas em termos das relações entre as matrizes **P** e **Q**. Especificamente estas transformações são:

Congruente $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T$

Diz-se que duas matrizes **A** e **B** são congruentes se existir uma matriz não singular **Q** tal que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

Quando se utilizar uma transformação deste tipo em circuitos eléctricos garante-se que a potência se mantém invariante na transformação, isto é, a potência do sistema representado pelas equações de partida é igual à potência do sistema representado pelas equações finais.

Colineatória (ou de Semelhança) $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$

Neste caso, tem-se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q} \mathbf{I}'$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{U}'$$

Esta equação permite concluir que a matriz das tensões se transforma do mesmo modo que a matriz das correntes.

As transformações de semelhança têm a propriedade extremamente importante de que os valores característicos são invariantes sobre a transformação. Este resultado só é válido quando a derivada da matriz de transformação for nula.

Ortogonal $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$

Uma transformação ortogonal é um caso especial de uma transformação de semelhança e de uma transformação congruente. Tem as propriedades de ambas as transformações.

Neste caso, pode demonstrar-se também que numa transformação ortogonal os comprimentos e os ângulos dos vectores são preservados na transformação.

O determinante de uma matriz ortogonal é ± 1 .

Unitária $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{*T} = \mathbf{Q}^{-1}$

Tem propriedades semelhantes às da transformação ortogonal.

3.4 Transformação de um sistema trifásico num sistema bifásico equivalente. Transformação de Concordia.

Definição da transformação

A figura 3.8 representa o estator de duas máquinas que se pretendem equivalentes. Estas máquinas têm dimensões físicas idênticas, isto é, são iguais o raio do rotor, o entreferro e o comprimento segundo o eixo de rotação. A diferença encontra-se nos enrolamentos. No primeiro caso temos um sistema trifásico (i_a, i_b, i_c) e no segundo caso um sistema bifásico (i_α, i_β).

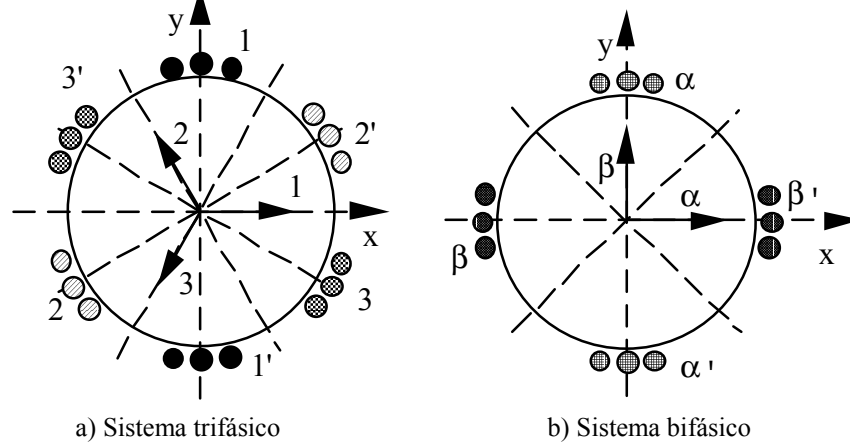


Fig. 3.8 Sistemas trifásico e bifásico

Para que estas duas máquinas sejam equivalentes é necessário que a energia magnética armazenada em cada uma delas seja igual. Isto obtém-se com iguais distribuições do campo de indução magnética. Para que tal aconteça, uma vez que o entreferro é igual, é necessário que haja ondas de força magnetomotriz iguais. Assim, tem-se:

$$F_{mT}(\theta_s, t) = F_{mB}(\theta_s, t) \quad (3.27)$$

O índice T refere-se ao sistema trifásico e o índice B refere-se ao sistema bifásico.

A coordenada de posição, ângulo eléctrico, é representada por θ_s . A variável t representa o tempo. Note-se que a variável θ_s é uma coordenada de posição angular genérica que não tem nenhuma relação com a variável θ que representa a posição angular do rotor.

Admitindo a hipótese de distribuição sinusoidal de condutores e escolhendo um referencial apropriado, tem-se:

$$F_{mT} = \frac{4}{\pi} [K_e N]_T \left\{ \begin{array}{l} i_a \cos(\theta_s) + \\ + i_b \cos\left(\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) \\ + i_c \cos\left(\theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Onde N é o número de espiras de cada enrolamento e K_e o factor de enrolamento respectivo. Como

$$\cos\left(\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos(\theta_s) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta_s) \quad (3.29)$$

$$\cos\left(\theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos(\theta_s) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta_s) \quad (3.30)$$

a equação 3.28 toma a forma

$$F_{mT} = \frac{4}{\pi} [K_e N]_T \left\{ \begin{array}{l} \left(i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c\right) \cos(\theta_s) + \\ + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} i_c\right) \sin(\theta_s) \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Por sua vez a onda de força magnetomotriz provocada pelo sistema bifásico escreve-se:

$$F_{mB} = \frac{4}{\pi} [K_e N]_B \left\{ \begin{array}{l} i_\alpha \cos(\theta_s) + \\ + i_\beta \sin(\theta_s) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

Para que ambas as ondas de força magnetomotriz sejam iguais é necessário ter-se:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{(K_e N)_T}{(K_e N)_B} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A relação entre os dois vectores das correntes está assim dependente da relação dos números eficazes de espiras. Contudo a matriz de 2x3 presente na equação não é a matriz que se pretende calcular. A matriz C deve relacionar as variáveis originais com as variáveis novas. Além disso a matriz da expressão 3.33 não tem inversa.

Para resolver este problema considera-se uma nova variável i_o que seja proporcional à corrente homopolar, isto é, que seja proporcional à soma das 3 correntes i_a , i_b e i_c .

Substituamos também a relação de número de espiras por uma constante k a determinar. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ m & m & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Determina-se agora as constantes k e m de modo a que a matriz quadrada da expressão 3.34 seja ortogonal. Esta imposição não é necessária para o desenvolvimento da teoria, mas tornar-se-á cómoda mais à frente. Tem-se:

$$k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ m & m & m \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & m \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Multiplicando a primeira linha pela primeira coluna obtém-se:

$$k^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 \quad \text{donde} \quad k = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.36)$$

Multiplicando a terceira linha pela terceira coluna obtém-se:

$$3k^2 m^2 = 1 \quad \text{donde} \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.37)$$

A matriz de transformação será:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Como se viu anteriormente, o facto de a matriz de transformação ser ortogonal tem algumas vantagens. Com efeito, tem-se:

$$i_{abc} = \mathbf{C} i_{\alpha\beta o} \quad i_{\alpha\beta o} = \mathbf{C}^T i_{abc} \quad (3.39a)$$

$$u_{abc} = \mathbf{C} u_{\alpha\beta o} \quad u_{\alpha\beta o} = \mathbf{C}^T u_{abc} \quad (3.39b)$$

$$\psi_{abc} = \mathbf{C} \psi_{\alpha\beta o} \quad \psi_{\alpha\beta o} = \mathbf{C}^T \psi_{abc} \quad (3.39c)$$

Todas estas variáveis **são transformadas da mesma forma**. A transformação inversa é definida por \mathbf{C}^T . Esta transformação é normalmente designada na literatura por transformação dos dois eixos, por transformação de Concordia ou simplesmente por transformação $\alpha\beta$.

Uma outra grande vantagem consiste em que os valores próprios do sistema de equações em coordenadas abc são iguais aos valores próprios do modelo em coordenadas $\alpha\beta$.

Uma vez que $i_o = (i_a + i_b + i_c)/\sqrt{3}$ normalmente é nula, as 3 correntes são linearmente dependentes e apenas duas delas são necessárias para representar o sistema. Isto equivale a dizer que basta conhecer apenas i_α e i_β . Assim a matriz \mathbf{C} fica:

$$\mathbf{C}_{2,3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Como esta matriz é uma matriz rectangular, ela transforma um sistema de 3 equações a 3 incógnitas num sistema de 2 equações a 2 incógnitas.

Exemplo 3.2 "Transformação de Concordia das tensões em regime equilibrado".

Considere os seguintes sistemas trifásicos de tensão:

- a) Sistema simétrico sinusoidal e equilibrado de sequência directa.
- b) Sistema simétrico sinusoidal e equilibrado de sequência inversa.
- c) Sistema simétrico sinusoidal e equilibrado de sequência homopolar.
- d) Sistema simétrico de tensões rectangulares

Calcule os valores equivalentes em $\alpha, \beta, 0$, isto é, calcule u_α, u_β, u_0 .

Resolução:

1. Sistema simétrico de tensões de sequência directa

Seja:

$$u_a = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_b = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_c = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3})$$

Como:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

Substituindo u_a , u_b e u_c pelos seus valores e executando os cálculos, obtém-se:

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_\beta = \sqrt{3} U \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u_0 = 0$$

2. Sistema simétrico de tensões de sequência inversa

Seja:

$$u_a = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_b = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3})$$

$$u_c = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3})$$

Após a realização do produto matricial, obtém-se:

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_\beta = -\sqrt{3} U \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u_0 = 0$$

3. Sistema simétrico de tensões de sequência homopolar

Seja:

$$u_a = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_b = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_c = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

Após a realização do produto matricial, obtém-se:

$$u_\alpha = 0$$

$$u_\beta = 0$$

$$u_0 = \sqrt{6} U \cos(\omega t + \alpha)$$

4. Sistema simétrico de tensões rectangulares

Aplicando a transformação de Concordia por troços de 60° tem-se:

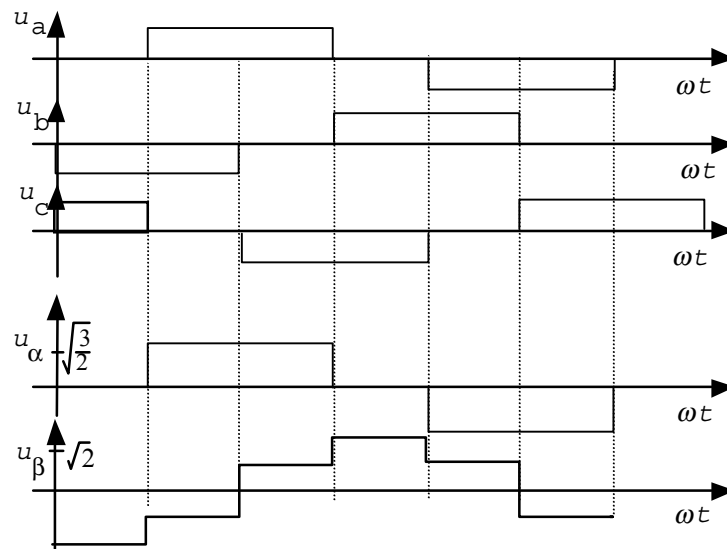


Fig. 3.9 Transformação $\alpha\beta$ de um sistema de tensões rectangulares.

A tensão u_α tem a mesma forma da tensão u_a . A sua amplitude é $\sqrt{3/2}$ vezes a amplitude da tensão u_a . A tensão u_β tem uma forma diferente das tensões que lhe deram origem.

Observação: Deste exercício pode concluir-se que a transformação de Concordia faz um desacoplamento entre as componentes homopolares e as outras componentes.

De igual modo se pode verificar que a frequência das variáveis se mantém invariante.

Interpretação geométrica da transformação de Concordia

A transformação de Concordia pode ser vista como uma mudança de referencial. Considere-se que os 3 valores de fase de uma determinada grandeza como por exemplo a corrente, a tensão ou o fluxo ligado são as componentes de um vector no espaço (x,y,z) . Tomem-se, por exemplo, as 3 correntes i_a , i_b , e i_c . O vector correspondente será dado por $\vec{I} = (i_a, i_b, i_c)$. Se estas 3 correntes variarem no tempo, o vector \vec{I} variará no espaço e no tempo descrevendo uma determinada trajectória que depende da forma de onda das suas 3 componentes. A figura 3.10 ilustra esta trajectória para um sistema trifásico simétrico e equilibrado de grandezas sinusoidais com duas vistas diferentes. Neste caso a trajectória é uma circunferência desenhada sobre o plano definido por $x+y+z=0$. Este plano resulta do facto da soma das 3 grandezas ser nula ou seja a componente homopolar é nula. Assim quando esta componente for nula a trajectória será sempre desenhada no mesmo plano tomando trajectórias mais ou menos complexas consoante a forma de onda das grandezas que representa.

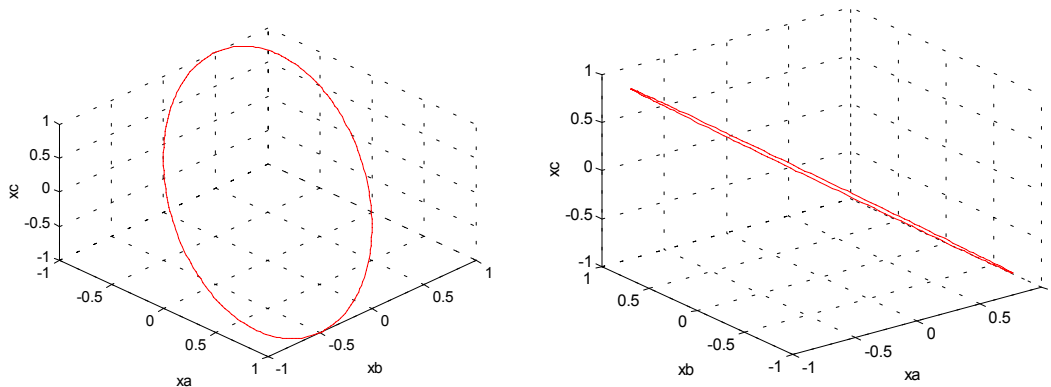


Figura 3.10. Representação de um sistema trifásico simétrico e equilibrado de grandezas sinusoidais.

Considere-se agora o plano definido por $x+y+z=0$ e um vector perpendicular a ele, por exemplo o vector $(1,1,1)$. Defina-se agora um novo referencial x',y',z' onde z' esteja na direcção de $(1,1,1)$ e x' e y' no plano referido. Existe um grau de liberdade na definição das direcções x' e y' . É necessário que estejam no plano referido e que sejam perpendiculares entre si. Vamos procurar uma base de vectores com norma unitária para definir o novo referencial.

Segundo o teorema de mudança de bases, se \mathbf{A} é a matriz que representa uma transformação linear em relação a uma base ordenada, então a matriz \mathbf{B} que representa a mesma transformação linear em relação a uma nova base obtém-se por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \quad (3.41)$$

onde S é a matriz de mudança de base cujas colunas são as componentes dos vectores da nova base em relação à base original.

Determine-se então 3 vectores unitários que definem o novo referencial.

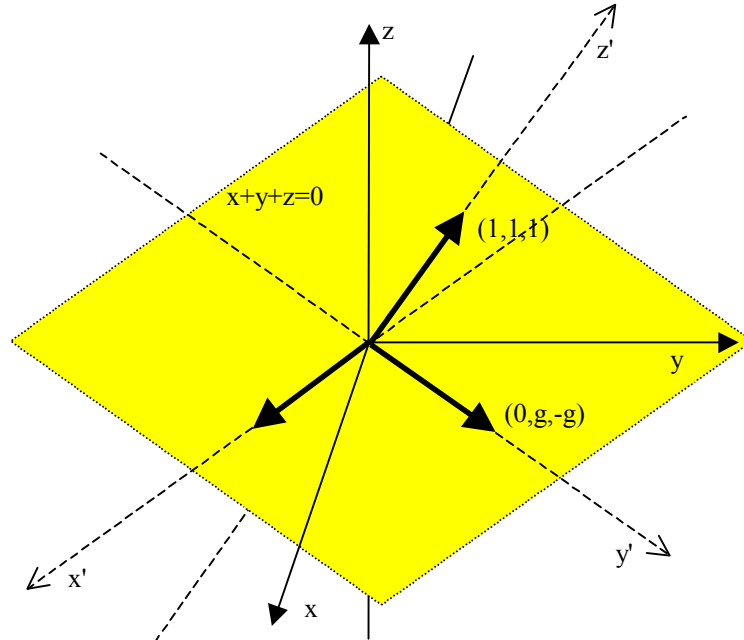


Fig. 3.11. Definição dos referenciais

Vector unitário na direcção z' .

O vector nesta direcção que tem norma unitária é dado por:

$$\vec{e}'_z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.42)$$

Vector unitário na direcção y' .

Para a direcção y' escolhe-se o vector na intersecção dos planos $x+y+z=0$ e $x=0$. Ou seja, um vector com a primeira componente igual a zero e a soma das outras duas também nula. Escolhemos:

$$\vec{e}'_y = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.43)$$

Vector unitário na direcção x' .

O vector e_x é dado pelo produto externo:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x' = \vec{e}_y' \times \vec{e}_z' &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_z \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z \right)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Segundo o teorema de mudança de bases a matriz de transformação **S** será a matriz cujas colunas são as componentes dos vectores que definem o novo referencial, isto é será a matriz dada por:

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Esta é a matriz da transformação de Concordia. Pode concluir-se assim que a transformação de Concordia é uma transformação de referencial.

Resumo das propriedades da transformação de Concordia

1. A transformação é uma transformação ortogonal. Como consequência:
 - 1.1 O seu determinante é unitário
 - 1.2 Um vector no referencial abc é transformado noutro vector no referencial $\alpha\beta o$ com o mesmo módulo.
 - 1.3 Um vector variando no tempo tem o mesmo valor eficaz em abc e em $\alpha\beta o$.
 - 1.4 Dois vectores \vec{a} e \vec{b} em abc são transformados para $\alpha\beta o$ em \vec{a}' e \vec{b}' , mantendo o mesmo ângulo.
 - 1.5 Os eventuais produtos internos e externos de vectores em abc mantêm-se invariantes em $\alpha\beta o$.
 - 1.6 As tensões, correntes e fluxos são transformadas da mesma maneira.
 - 1.7 As perdas e as potências em jogo são invariantes na mudança de variáveis.

2. Existe desacoplamento entre as grandezas $\alpha\beta$ e o . Como consequência:
 - 2.1 A transformação faz com que as componentes $\alpha\beta$ sejam invariantes em relação a termos aditivos desde que estes termos sejam somados simultaneamente às 3 fases. No caso das tensões, isto significa que u_α e u_β são independentes da escolha do ponto neutro.
3. A matriz de transformação é uma matriz de constantes. Como consequência:
 - 3.1 O modelo das máquinas mantém a mesma forma.
 - 3.2 Os valores próprios são invariantes.

3.5 Aplicação da transformação de Concordia à Máquina de Indução

A obtenção do modelo matemático da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta$ é realizada aplicando a transformação de Concordia às grandezas do estator e às grandezas do rotor. A matriz de transformação \mathbf{Q} deverá ser definida como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Onde \mathbf{C} é a matriz de transformação de Concordia.

Como a matriz de transformação, neste caso particular, é uma matriz de constantes, a sua derivada é uma matriz nula. Assim a matriz \mathbf{G}'' é nula e como consequência, as equações do novo sistema representativo da máquina que se está a estudar, pode ser escrito na forma 3.11 ou mais compactamente:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I} + \frac{d}{dt} [\mathbf{L} \mathbf{I}] \quad (3.47)$$

A aplicação da equação 3.26 permite fazer os cálculos de uma forma mais ordenada.

Transformação dos coeficientes de indução do estator de uma máquina de pólos lisos

A matriz dos coeficientes de indução original é representada pela equação 3.1.

A nova matriz dos coeficientes de indução será $\mathbf{L}' = \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C}$.

$$\mathbf{L}' = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{ss} & M_{ss} \\ M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \\ M_{ss} & M_{ss} & L_{ss} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Multiplicando as matrizes da direita obtém-se:

$$\mathbf{L}' = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss}-M_{ss} & 0 & \frac{L_{ss}+2M_{ss}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{L_{ss}-M_{ss}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}(L_{ss}-M_{ss}) & \frac{L_{ss}+2M_{ss}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{L_{ss}-M_{ss}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}(L_{ss}-M_{ss}) & \frac{L_{ss}+2M_{ss}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Efectuando as operações, obtém-se:

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} L_{ss}-M_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ss}-M_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ss}+2M_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

A $L_{ss}-M_{ss}$ dá-se o nome de indutância cíclica do enrolamento

A $L_{ss}+2M_{ss}$ dá-se o nome de indutância homopolar. Naturalmente que se terá:

$$L_{\alpha} = L_{\beta} = L_{ss} - M_{ss} = L_s \quad (3.50)$$

$$L_{so} = L_{ss} + 2 M_{ss} \quad (3.51)$$

Transformação da matriz dos coeficientes de indução mútua entre o estator e o rotor da máquina de indução

Tem-se:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 \\ M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 \\ M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

A nova matriz será dada por:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{M}' = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 \\ M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos\theta_2 \\ M_{sr}\cos\theta_2 & M_{sr}\cos\theta_3 & M_{sr}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Efectuando os cálculos, obtém-se:

$$\mathbf{M}' = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A aplicação da transformação de Concordia aos termos relativos à terceira harmónica na expressão 3.5 faz-se do mesmo modo. Apenas o termo correspondente à terceira linha e terceira coluna é não nulo. Obtém-se:

$$M'_{(3,3)} = 3 M_3 \cos(3\theta) \quad (3.55)$$

Modelo matemático da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta o$.

Atendendo aos resultados anteriores e como a matriz de transformação é uma matriz que não varia no tempo, pode concluir-se que o modelo da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta o$ se escreve:

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha s} \\ u_{\beta s} \\ u_{os} \\ u_{\alpha r} \\ u_{\beta r} \\ u_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s i_{\alpha s} \\ r_s i_{\beta s} \\ r_s i_{os} \\ r_r i_{\alpha r} \\ r_r i_{\beta r} \\ r_r i_{or} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_{os} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \\ \psi_{or} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_{os} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \\ \psi_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & M\cos\theta & -M\sin\theta & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M\sin\theta & M\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & L_{so} & 0 & 0 & 3M_3\cos 3\theta \\ M\cos\theta & M\sin\theta & 0 & L_r & 0 & 0 \\ -M\sin\theta & M\cos\theta & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 3M_3\cos 3\theta & 0 & 0 & L_{ro} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{os} \\ i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \\ i_{or} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Onde

$$M = \frac{3}{2} M_{sr} \quad e \quad L_{ro} = L_{rr} + 2M_{rr} \quad (3.58)$$

Nestas equações considerou-se também a terceira harmónica dos coeficientes de indução mútua entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos do rotor.

A análise das equações 3.57 permite concluir que existe desacoplamento entre a componente homopolar e as outras duas componentes. Com efeito, as equações 3.57 podem ser escritas na forma:

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M\cos\theta & -M\sin\theta \\ 0 & L_s & M\sin\theta & M\cos\theta \\ M\cos\theta & M\sin\theta & L_r & 0 \\ -M\sin\theta & M\cos\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

e

$$\begin{bmatrix} \psi_{os} \\ \psi_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{so} & 3M_3\cos 3\theta \\ 3M_3\cos 3\theta & L_{ro} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{os} \\ i_{or} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

As componentes α, β não interferem nas equações da componente homopolar e esta não interfere nas equações das componentes α, β . Diz-se que há desacoplamento entre as componentes α, β e a componente o . Normalmente a componente homopolar da corrente é nula. O modelo da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta$ reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha s} \\ u_{\beta s} \\ u_{\alpha r} \\ u_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s i_{\alpha s} \\ r_s i_{\beta s} \\ r_r i_{\alpha r} \\ r_r i_{\beta r} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Em que a relação entre os fluxos e as correntes é dada pela equação 3.59. Tal como referimos anteriormente, pode concluir-se que a 3ª harmónica dos coeficientes de indução mútua estator-rotor pode ser ignorada. Com efeito, mesmo quando esta harmónica é elevada, ela não entra na conversão electromecânica de energia desde que a componente homopolar seja nula. As equações 3.61 representam o equilíbrio eléctrico do sistema. Efectuando as derivadas do produto matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha s} \\ u_{\beta s} \\ u_{\alpha r} \\ u_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & -\omega_m M \sin \theta & -\omega_m M \cos \theta \\ 0 & r_s & \omega_m M \cos \theta & -\omega_m M \sin \theta \\ -\omega_m M \sin \theta & \omega_m M \cos \theta & r_r & 0 \\ -\omega_m M \cos \theta & -\omega_m M \sin \theta & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} L_s & 0 & M \cos \theta & -M \sin \theta \\ 0 & L_s & M \sin \theta & M \cos \theta \\ M \cos \theta & M \sin \theta & L_r & 0 \\ -M \sin \theta & M \cos \theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

O binário é dado por:

$$M_{em} = \frac{1}{2} p_p [i_{\alpha s} i_{\beta s} i_{\alpha r} i_{\beta r}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M \sin \theta & -M \cos \theta \\ 0 & 0 & M \cos \theta & -M \sin \theta \\ -M \sin \theta & M \cos \theta & 0 & 0 \\ -M \cos \theta & -M \sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ou, atendendo à simetria

$$M_{em} = p_p [i_{\alpha s} \ i_{\beta s}] \begin{bmatrix} -M \sin \theta & -M \cos \theta \\ M \cos \theta & -M \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Em que p_p representa o número de pares de pólos da máquina.

Outras Expressões do binário

A expressão do binário também pode ser escrita só em termos das grandezas do estator ou só em termos das grandezas do rotor. Consideremos a expressão:

$$-\psi_{\beta} i_{\alpha} + \psi_{\alpha} i_{\beta}$$

Relativamente a grandezas do estator (omitindo o índice s no termo à esquerda do sinal de igual)

$$\begin{aligned} -\psi_{\beta} i_{\alpha} + \psi_{\alpha} i_{\beta} = & -(L_s i_{\beta s} + M \sin \theta i_{\alpha r} + M \cos \theta i_{\beta r}) i_{\alpha s} \\ & +(L_s i_{\alpha s} + M \cos \theta i_{\alpha r} - M \sin \theta i_{\beta r}) i_{\beta s} \end{aligned}$$

Esta expressão pode escrever-se na forma:

$$[i_{\alpha s}, i_{\beta s}] \begin{bmatrix} -M \sin \theta & -M \cos \theta \\ M \cos \theta & -M \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix}$$

Que é a expressão do binário. Assim o binário pode ser escrito só em termos de grandezas do estator.

$$M_{em} = p_p (-\psi_{\beta} i_{\alpha} + \psi_{\alpha} i_{\beta}) \quad (3.65)$$

Esta expressão pode ser escrita em termos do produto externo do vector do fluxo estatórico $\vec{\psi}_s = (\psi_{\alpha}, \psi_{\beta})$ por $\vec{i}_s = (i_{\alpha}, i_{\beta})$. Tem-se:

$$M_{em} = p_p (\vec{\psi}_s \times \vec{i}_s) \quad (3.66)$$

Também é possível escrever a mesma expressão do binário só em termos de grandezas do rotor. A mesma manipulação de expressões permite obter:

$$M_{em} = p_p (\psi_{\beta} i_{\alpha} - \psi_{\alpha} i_{\beta}) \quad \text{ou} \quad M_{em} = p_p (-\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r) \quad (3.67)$$

As expressões 3.55 ou 3.56 estão expressas em termos dos fluxos e das correntes e são válidas também em regime de saturação do circuito magnético.

3.6 Máquina Síncrona de pólos salientes em coordenadas $\alpha\beta$.

Consideremos uma máquina síncrona de pólos salientes sem enrolamentos amortecedores. A obtenção do modelo matemático da máquina síncrona em coordenadas $\alpha\beta$ é realizada aplicando a transformação de Concordia às grandezas do estator. A matriz de transformação deverá ser definida como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Onde \mathbf{C} é a matriz de transformação de Concordia.

Tal como no caso da máquina de indução, a matriz de transformação, é uma matriz de constantes. Assim a matriz \mathbf{G}'' é nula e como consequência pode ser escrito na forma 3.11 ou mais compactamente:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I} + \frac{d}{dt} \{ \mathbf{L} \mathbf{I} \} \quad (3.69)$$

Para simplificar a análise considere-se uma máquina de um par de pólos. A aplicação da matriz de Concordia corresponde a substituir o seu enrolamento trifásico por um enrolamento bifásico equivalente.

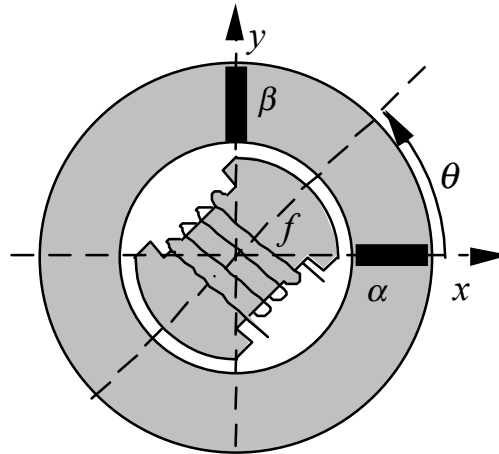


Fig. 3.12. Máquina Síncrona de pólos salientes.

Os coeficientes de indução relativos aos enrolamentos do estator são obtidos depois de aplicada a transformação de Concordia às equações 3.10. Estas operações encontram-se no anexo a este capítulo. Escrevem-se:

$$L_{\alpha} = (L_a - M_a) + \left(\frac{1}{2} L_b + M_b \right) \cos 2\theta \quad (3.70)$$

$$L_{\beta} = (L_a - M_a) - \left(\frac{1}{2} L_b + M_b\right) \cos 2\theta \quad (3.71)$$

$$M_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} L_b + M_b\right) \sin 2\theta \quad (3.72)$$

Estas expressões podem pôr-se na forma:

$$L_{\alpha} = \frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta \quad (3.73)$$

$$L_{\beta} = \frac{L_d + L_q}{2} - \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta \quad (3.74)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{L_d - L_q}{2} \sin 2\theta \quad (3.75)$$

onde:

$$L_d = (L_a - M_a) + \left(\frac{1}{2} L_b + M_b\right) \quad (3.76)$$

$$L_q = (L_a - M_a) - \left(\frac{1}{2} L_b + M_b\right) \quad (3.77)$$

O coeficiente de indução própria do enrolamento de excitação é independente da posição do rotor da máquina. Assim:

$$L_f = cte \quad (3.78)$$

Os coeficientes de indução mútua entre o estator e o rotor admitem-se sinusoidais. Assim:

$$M_{\alpha f} = M \cos \theta \quad (3.79)$$

$$M_{\beta f} = M \sin \theta \quad (3.80)$$

Para simplificar a escrita das equações façamos:

$$L_{av} = \frac{L_d + L_q}{2} \quad L_{os} = \frac{L_d - L_q}{2} \quad (3.81)$$

donde

$$L_{av} + L_{os} = L_d \quad L_{av} - L_{os} = L_q \quad (3.82)$$

A equação que relaciona os fluxos com as correntes será:

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \\ \psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{av} + L_{os} \cos 2\theta & L_{os} \sin 2\theta & M \cos \theta \\ L_{os} \sin 2\theta & L_{av} - L_{os} \cos 2\theta & M \sin \theta \\ M \cos \theta & M \sin \theta & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_f \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Esta equação permite determinar o sistema de equações diferenciais que traduzem a dinâmica da máquina síncrona usando as mesmas técnicas que se utilizaram na determinação do modelo da máquina de indução.

Exemplo 3.3 Obtenção da matriz dos coeficientes de indução da máquina síncrona de pólos salientes por inspecção.

Considere uma máquina síncrona sem enrolamentos amortecedores com pólos salientes, bipolar, e com dois enrolamentos no estator simétricos e colocados em quadratura.

Determine a matriz dos coeficientes de indução desta máquina.

Resolução

Esta máquina pode ser representada pela figura 3.12. Como tem 3 circuitos, a matriz dos coeficientes de indução deverá ter 9 elementos.

A. Coeficiente de auto-indução.

O coeficiente de auto-indução do circuito de excitação que se encontra colocado no rotor é constante. Com efeito a relutância do circuito magnética vista por este circuito é sempre constante não dependendo da posição do rotor.

O coeficiente de auto indução dos enrolamentos do estator vão depender da posição do rotor pois o circuito magnético visto do estator vai depender desta posição.

Quando o rotor se encontrar na posição $\theta=0$, o entreferro correspondente ao circuito do enrolamento α é mínimo e portanto o respectivo coeficiente de auto-indução será máximo. Designêmo-lo por L_d .

Por sua vez, para o enrolamento β este entreferro é máximo o que vai corresponder um coeficiente de auto-indução mínimo. designêmo-lo por L_q .

Quando o rotor se deslocar os coeficientes de auto-indução destes dois enrolamentos variarão entre L_d e L_q . Na posição $\theta=\pi/2$, agora o enrolamento α terá um coeficiente de auto-indução igual a L_q e o

coeficiente de indução L_β será igual a L_d .

A figura 3.13 mostra o andamento destes coeficientes de auto-indução ao longo de uma rotação do rotor.

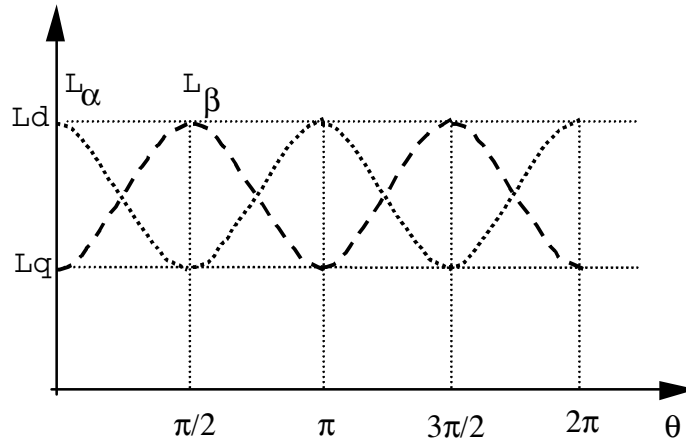


Fig. 3.13 Andamento de L_α e L_β .

A figura 3.13 permite concluir que estes coeficientes são funções periódicas do ângulo de posição do rotor θ . Um desenvolvimento aproximado destes coeficientes consiste em considerar que estes são sinusoidais em 2θ .

Assim:

$$L_\alpha = \frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta$$

$$L_\beta = \frac{L_d + L_q}{2} - \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta$$

que são expressões semelhantes a 3.73 e 3.74 obtidas a partir da transformação de Concordia.

B. Coeficientes de indução mútua.

Entre estator e rotor

Os coeficientes de indução mútua entre os enrolamentos do estator e do rotor podem considerar-se sinusoidais e funções da posição relativa entre os dois enrolamentos respectivos. Assim:

$$M_{\alpha f} = M \cos \theta \quad M_{\beta f} = M \cos (\pi/2 - \theta) = M \sin \theta$$

que também coincidem com as expressões obtidas pela transformação de Concordia.

Entre estator e estator

Quanto aos coeficientes de indução mútua entre os enrolamentos do estator, considere-se a figura 3.14 em que $i_\beta = 0$. O enrolamento α , percorrido pela corrente i_α cria uma onda de força magnetomotriz sinusoidal em θ_s . A posição máxima desta onda f.m.m encontra-se alinhada com o eixo dos x.

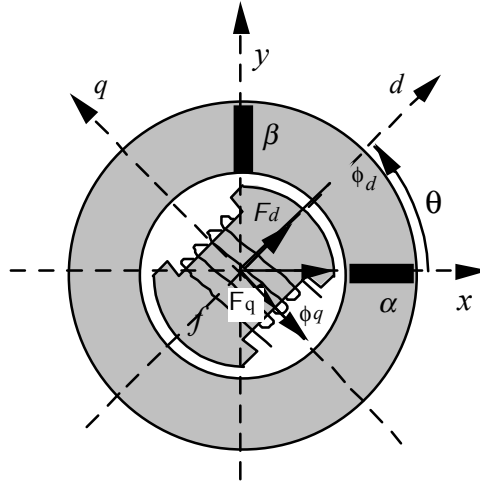


Fig. 3.14 Decomposição de fmm e fluxos

Decompondo em componentes segundo os eixos d e q , obtém-se:

$$F_d = F_\alpha \cos \theta \quad F_q = -F_\alpha \sin \theta$$

onde

$$F_\alpha = K_e N i_\alpha \cos(\theta_e)$$

As f.m.m F_d e F_q vão criar fluxos ϕ_d e ϕ_q dados por:

$$\phi_d = \frac{F_d}{R_{md}} \quad \phi_q = \frac{F_q}{R_{mq}}$$

A projecção destes dois fluxos sobre o eixo dos y onde se encontra o enrolamento β dá:

$$\phi_\beta = \phi_d \sin \theta + \phi_q \cos \theta$$

Substituindo, obtém-se:

$$\phi_\beta = \left(\frac{1}{R_{md}} - \frac{1}{R_{mq}} \right) F_\alpha \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

O fluxo no enrolamento β será:

$$\psi_\beta = K_e N \phi_\beta = \left(\frac{K_e^2 N^2}{R_{md}} - \frac{K_e^2 N^2}{R_{mq}} \right) i_\alpha \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

Identificando:

$$L_d = \frac{K_e^2 N^2}{R_{md}} \quad e \quad L_q = \frac{K_e^2 N^2}{R_{mq}}$$

Obtém-se a expressão:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{L_d - L_q}{2} \sin 2\theta$$

que coincide com a expressão 3.75.

3.7 Transformação de “Rotação de Referencial”

A. Definição

Considere-se um ponto P de coordenadas i_α e i_β no referencial α - β e de coordenadas i_d e i_q no referencial d - q . Estes dois referenciais têm a mesma origem, mas estão desfasados de um ângulo ρ como se mostra na figura.

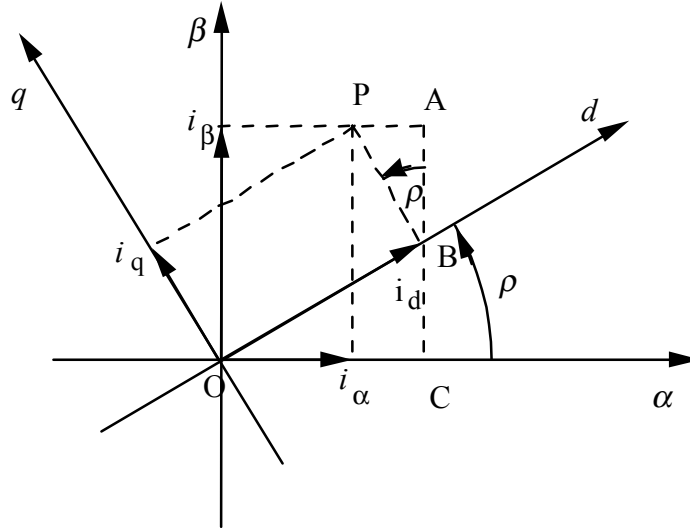


Fig. 3.15. Relação entre os referenciais $\alpha\beta$ e dq .

Tendo em atenção considerações geométricas da figura, tem-se:

$$PA = i_q \sin \rho \quad CB = i_d \sin \rho \quad (3.84)$$

$$BA = i_q \cos \rho \quad OC = i_d \cos \rho \quad (3.85)$$

A relação entre as coordenadas do ponto P nos dois referenciais será:

$$i_\alpha = i_d \cos \rho - i_q \sin \rho \quad (3.86)$$

$$i_\beta = i_d \sin \rho + i_q \cos \rho \quad (3.87)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

A matriz quadrada é a matriz de transformação. O ângulo ρ é o ângulo de transformação.

Propriedades da matriz de transformação:

1. É uma matriz ortogonal. A sua inversa é igual à sua transposta.
2. O seu determinante é unitário e não depende de ρ .
3. O resultado da multiplicação desta matriz por um vector no plano num determinado referencial é um vector do mesmo módulo e desfasado de um ângulo ρ em relação ao vector original.
4. Expressões com produtos externos ou produtos internos de vectores mantêm-se inalteráveis na transformação.

Exemplo 3.4 Composição da transformação de Concordia e da Transformação de rotação de referencial - Transformação de Blondel-Park.

A matriz equivalente que resulta da aplicação sucessiva das duas transformações é obtida pelo produto das duas matrizes, ou seja:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & 0 \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde a componente 0 é mantida na rotação de referencial. Executando os cálculos, obtém-se:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos \rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \rho & \frac{1}{2}\cos \rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \rho & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos \rho - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \rho & \frac{1}{2}\cos \rho - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \rho & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\rho - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\rho - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\rho - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\rho - \frac{4\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Tal como as matrizes de Concordia e de rotação de referencial também esta matriz é ortogonal pois representa o produto de duas matrizes ortogonais. Esta transformação é frequentemente designada por transformação de Park ou por transformação de Blondel-Park.

B. Transformação de um modelo de uma máquina em coordenadas α, β para coordenadas d,q.

Em coordenadas $\alpha\beta$ o modelo de uma máquina é definido por equações da forma:

$$U_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} + \frac{d\Psi_{\alpha\beta}}{dt} \quad (3.90)$$

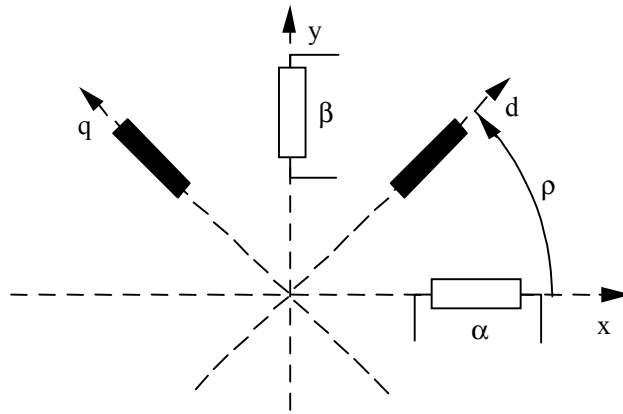


Fig 3.16. Relação entre a posição dos enrolamentos $\alpha\beta$ e dq.

De acordo com a figura 3.16 a transformação é definida do seguinte modo:

$$I_{\alpha\beta} = C_{(\rho)} I_{dq} \quad (3.91)$$

$$U_{dq} = C_{(\rho)}^T U_{\alpha\beta} \quad (3.92)$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = C_{(\rho)} \Psi_{dq} \quad (3.93)$$

A matriz $C_{(\rho)}$ define-se:

$$C(\rho) = \begin{bmatrix} \cos\rho & -\sin\rho \\ \sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Substituindo as matrizes das correntes e dos fluxos na equação do modelo em coordenadas α, β , tem-se:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\beta} &= \mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{C}(\rho) \mathbf{I}_{dq} + \frac{d}{dt} [\mathbf{C}(\rho) \boldsymbol{\Psi}_{dq}] \\
&= \mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{C}(\rho) \mathbf{I}_{dq} + \dot{\rho} \left[\frac{d\mathbf{C}(\rho)}{d\rho} \right] \boldsymbol{\Psi}_{dq} + \mathbf{C}(\rho) \left[\frac{d\boldsymbol{\Psi}_{dq}}{dt} \right]
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Multiplicando à esquerda ambos os termos desta equação por $\mathbf{C}(\rho)^T$ tem-se:

$$\begin{aligned}
U_{dq} &= \mathbf{C}(\rho)^T \mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{C}(\rho) \mathbf{I}_{dq} + \mathbf{C}(\rho)^T \dot{\rho} \left[\frac{d\mathbf{C}(\rho)}{d\rho} \right] \boldsymbol{\Psi}_{dq} \\
&\quad + \mathbf{C}(\rho)^T \mathbf{C}(\rho) \left[\frac{d\boldsymbol{\Psi}_{dq}}{dt} \right]
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Define-se

$$\mathbf{R}_{dq} = \mathbf{C}(\rho)^T \mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{C}(\rho) \tag{3.97}$$

Sabendo que $\mathbf{C}(\rho)$ é ortogonal, isto é $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$ e como:

$$\mathbf{C}(\rho)^T \left[\frac{d\mathbf{C}(\rho)}{d\rho} \right] = \begin{bmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\rho & -\cos\rho \\ \cos\rho & -\sin\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

o segundo produto matricial obtém-se:

$$\dot{\rho} \mathbf{C}(\rho)^T \left[\frac{d\mathbf{C}(\rho)}{d\rho} \right] \boldsymbol{\Psi}_{dq} = \dot{\rho} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \dot{\rho} \begin{bmatrix} -\Psi_q \\ \Psi_d \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

O modelo em coordenadas dq toma a forma:

$$u_d = r_d i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \dot{\rho} \Psi_q \tag{3.100}$$

$$u_q = r_q i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \dot{\rho} \Psi_d \tag{3.101}$$

NOTAS:

1. $\dot{\rho}$ é a velocidade a que roda o referencial d, q em relação ao referencial α, β
2. Como nestes cálculos não entrou nenhuma relação entre os fluxos e as correntes, as equações resultantes são válidas mesmo quando há saturação magnética.

3. Quando $\dot{\rho} = 0$ as equações tomam a mesma forma que as equações originais. Se $\dot{\rho} \neq 0$ há que adicionar termos proporcionais à velocidade de rotação do referencial.

As equações 3.90 e 3.91 são equações semelhantes às equações das máquinas de comutação. Assim, pode dizer-se que esta transformação transforma uma máquina de corrente alternada numa máquina de comutação equivalente. Certos autores designam esta transformação por transformação de comutador (“Commutator transformation”).

Se o valor das resistências dos enrolamentos for igual, a matriz das resistências é invariante na transformação.

Expressões do binário

Em grandezas $\alpha\beta$ o binário toma a forma anteriormente referida:

$$M_{em} = p_p (\vec{\psi}_s \times \vec{i}_s) \quad (3.102)$$

Ou em termos de grandezas do rotor:

$$M_{em} = p_p (\psi_\beta i_\alpha - \psi_\alpha i_\beta) \quad \text{ou} \quad M_{em} = p_p (-\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r) \quad (3.103)$$

Como na transformação “Rotação de referencial” todos os vectores são rodados do mesmo ângulo ρ mantendo constante o seu módulo, os produtos internos e externos destes vectores manterão o seu valor. Assim:

$$M_{em} = p_p (\vec{\psi}_s \times \vec{i}_s) \quad (3.104)$$

$$\text{ou} \quad M_{em} = p_p (-\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r) \quad (3.105)$$

Onde:

$$\vec{\psi}_s = (\psi_{ds}, \psi_{qs}) \quad \vec{i}_s = (i_{ds}, i_{qs}) \quad (3.106)$$

Exemplo 3.5 - “Aplicação da transformação de Park a um sistema equilibrado de tensões ou correntes”.

Considere um sistema trifásico e equilibrado de tensões:

$$u_a = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u_b = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_c = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3})$$

No exemplo 3.2 foi aplicada a transformação de Concordia e obtidas as tensões u_α , u_β , u_γ equivalentes.

1. Fazendo uma mudança de referencial obtenha as tensões do modelo de Park u_d , u_q e u_0 . Faça $\rho = \omega_m t + \alpha_m$ e $\omega = \omega_m$.

2. Considere agora que o sistema tem sequência de fases inversa e que se tem $\omega = 5\omega_m$. Calcule os valores de u_α , u_β , u_0 bem como de u_d e u_q .

3. Considere de novo o sistema com sequência de fases directa, mas e que se tem $\omega = 7\omega_m$. Calcule os valores de u_α , u_β , u_0 bem como as expressões de u_d e u_q .

Resolução:

1. Do exemplo n° 2 obtivemos para o sistema **directo**:

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(\omega t + \alpha_u)$$

$$u_\beta = \sqrt{3} U \sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$u_0 = 0$$

Fazendo a mudança de variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} U \cos(\omega t + \alpha_u) \\ \sqrt{3} U \sin(\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos \rho \cos(\omega t + \alpha_u) + \sin \rho \sin(\omega t + \alpha_u) \\ -\sin \rho \cos(\omega t + \alpha_u) + \cos \rho \sin(\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \gamma + \alpha_u) \\ \sin(\omega t - \gamma + \alpha_u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

fazendo $\rho = \omega t + \alpha_m$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \alpha_u - \omega_m t - \alpha_m) \\ \sin(\omega t + \alpha_u - \omega_m t - \alpha_m) \end{bmatrix}$$

se $\omega = \omega_m$, obtém-se:

$$u_d = \sqrt{3} U \cos(\alpha_u - \alpha_m)$$

$$u_q = \sqrt{3} U \sin(\alpha_u - \alpha_m)$$

onde se pode verificar que u_d e u_q são funções constantes no tempo

2. Para o caso de um sistema **inverso**

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(\omega t + \alpha_u)$$

$$u_\beta = -\sqrt{3} U \sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$u_0 = 0$$

Se a frequência for 5ω , tem-se

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(5\omega t + \alpha_u)$$

$$u_\beta = -\sqrt{3} U \sin(5\omega t + \alpha_u)$$

Transformação de Blondel-Park

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} U \cos(5\omega t + \alpha_u) \\ -\sqrt{3} U \sin(5\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos \rho \cos(5\omega t + \alpha_u) - \sin \rho \sin(5\omega t + \alpha_u) \\ -\sin \rho \cos(5\omega t + \alpha_u) - \cos \rho \sin(5\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos(5\omega t + \rho + \alpha_u) \\ -\sin(5\omega t + \rho + \alpha_u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

fazendo $\rho = \omega_m t + \alpha_m$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \alpha_u - \omega_m t - \alpha_m) \\ \sin(\omega t + \alpha_u - \omega_m t - \alpha_m) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos(6\omega t + \alpha_u + \alpha_m) \\ -\sin(6\omega t + \alpha_u + \alpha_m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Para o caso da sétima harmónica constituindo um sistema directo ter-se-á:

$$u_\alpha = \sqrt{3} U \cos(7\omega t + \alpha_u)$$

$$u_\beta = \sqrt{3} U \sin(7\omega t + \alpha_u)$$

Transformação de Park

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} U \cos(7\omega t + \alpha_u) \\ \sqrt{3} U \sin(7\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} U \begin{bmatrix} \cos \rho \cos(7\omega t + \alpha_u) + \sin \rho \sin(7\omega t + \alpha_u) \\ -\sin \rho \cos(7\omega t + \alpha_u) + \cos \rho \sin(7\omega t + \alpha_u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} \, U \begin{bmatrix} \cos(7\omega t - \rho + \alpha_u) \\ \sin(7\omega t - \rho + \alpha_u) \end{bmatrix}$$

fazendo $\rho = \omega t + \alpha_m$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \sqrt{3} \, U \begin{bmatrix} \cos(6\omega t + \alpha_u - \alpha_m) \\ \sin(6\omega t + \alpha_u - \alpha_m) \end{bmatrix}$$

Observação:

Deste exercício pode concluir-se que a transformação de Blondel-Park modifica a frequência das variáveis.

3.8. Modelo da Máquina de indução em coordenadas de Blondel-Park.

Introdução

O principal objectivo da transformação de Park, quando é aplicada ao modelo de uma máquina, consiste na simplificação das equações que constituem o modelo matemático dessa máquina.

No caso da máquina de indução pretende-se que este modelo não dependa da coordenada de posição θ e portanto que a matriz dos coeficientes de indução seja uma matriz de constantes. Para isso é necessário que os circuitos equivalentes em coordenadas dq do estator e do rotor estejam estacionários uns em relação aos outros. A matriz dos coeficientes de indução é ainda mais simplificada se aplicarmos uma transformação em que os eixos dq do estator estejam coincidentes com os eixos dq do rotor.

Existem várias situações em que este objectivo pode ser alcançado. Seguidamente analisam-se 3 casos com interesse.

A. Modelo em coordenadas do estator

Será necessário aplicar uma transformação definida do seguinte modo:

Estator ——— Identidade

Rotor ——— Rotação de um ângulo eléctrico ρ igual a $(-\theta)$

Segundo as equações 3.100 e 3.101 tem-se:

$$u_{\alpha s} = r_s i_{\alpha s} + \frac{d\psi_{\alpha s}}{dt} \quad (3.107a)$$

$$u_{\beta s} = r_s i_{\beta s} + \frac{d\psi_{\beta s}}{dt} \quad (3.107b)$$

$$u_{dr} = r_r i_{dr} + \frac{d\psi_{dr}}{dt} + p_p \omega_m \psi_{qr} \quad (3.107c)$$

$$u_{qr} = r_r i_{qr} + \frac{d\psi_{qr}}{dt} - p_p \omega_m \psi_{dr} \quad (3.107d)$$

Onde $p_p \omega_m$ é a velocidade angular da máquina reduzida a um par de pólos.

Exemplo 3. 6 " Modelo da máquina de indução no referencial do estator"

Obtenha o modelo da máquina de indução em coordenadas do estator através dos produtos matriciais discutidos na secção 3.3.

Resolução:

Aplicando a transformação segundo as regras discutidas atrás tem-se:

Cálculo da matriz das indutâncias

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta \\ & & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_S & 0 & M\cos\theta & -M\sin\theta \\ 0 & L_S & M\sin\theta & M\cos\theta \\ M\cos\theta & M\sin\theta & L_R & 0 \\ -M\sin\theta & M\cos\theta & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Cujo resultado é:

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} L_S & 0 & M & 0 \\ 0 & L_S & 0 & M \\ M & 0 & L_R & 0 \\ 0 & M & 0 & L_R \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{G} será dada por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E^T \frac{d\mathbf{L}_E}{d\theta} \mathbf{C}_E & \mathbf{C}_E^T \frac{d\mathbf{M}}{d\theta} \mathbf{C}_R \\ \mathbf{C}_R^T \frac{d\mathbf{M}^T}{d\theta} \mathbf{C}_E & \mathbf{C}_R^T \frac{d\mathbf{L}_R}{d\theta} \mathbf{C}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_E^T \mathbf{L}_E \frac{d\mathbf{C}_E}{d\theta} & \mathbf{C}_E^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{C}_R}{d\theta} \\ \mathbf{C}_R^T \mathbf{M}^T \frac{d\mathbf{C}_E}{d\theta} & \mathbf{C}_R^T \mathbf{L}_R \frac{d\mathbf{C}_R}{d\theta} \end{bmatrix}$$

Executando os cálculos, obtém-se:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & L_R \\ -M & 0 & -L_R & 0 \end{bmatrix}$$

Ao que corresponde um modelo que se pode pôr na forma:

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha s} \\ u_{\beta s} \\ u_{dr} \\ u_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 & 0 \\ 0 & M\dot{\theta} & r_r & L_R\dot{\theta} \\ -M\dot{\theta} & 0 & -L_R\dot{\theta} & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_S & 0 & M & 0 \\ 0 & L_S & 0 & M \\ M & 0 & L_R & 0 \\ 0 & M & 0 & L_R \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Estas equações podem por-se na forma das equações 3.107. Note-se que na matriz das indutâncias existe desacoplamento magnético entre as equações relativas ao eixo d e as equações relativas ao eixo q. Este

resultado é consequência do alinhamento dos eixos do estator com os eixos do rotor.

Exemplo 3.7 "Transformação de frequências"

Considerando a transformação definida nesta secção e admitindo que a frequência das correntes do estator é ω e que a máquina roda à velocidade ω_m , calcule a frequência das grandezas do rotor vistas no referencial do estator em regime permanente.

Resolução

Em regime permanente a frequência das grandezas do rotor será:

$$\omega_r = \omega_s - p_p \omega_m$$

donde poder-se-á escrever:

$$i_{\alpha r} = I_r \cos(\omega_r t)$$

$$i_{\beta r} = I_r \sin(\omega_r t)$$

Aplicando a transformação, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r \cos(\omega_r t) \\ I_r \sin(\omega_r t) \end{bmatrix} = I_r \begin{bmatrix} \cos(\theta + \omega_r t) \\ \sin(\theta + \omega_r t) \end{bmatrix}$$

Como $\theta = p_p \omega_m t + \alpha_m$, tem-se:

$$\theta + \omega_r t = (p_p \omega_m + \omega_r) t + \alpha_m = \omega_s t + \alpha_m$$

Conclusão: As grandezas i_{dr} e i_{qr} terão a frequência das grandezas do estator em regime permanente.

B. Modelo em coordenadas do rotor

Será necessário aplicar uma transformação definida do seguinte modo:

Estator ——— Rotação de um ângulo eléctrico ρ igual a θ

Rotor ——— Identidade

Obtém-se segundo 3.100 e 3.101

$$u_{ds} = r_s i_{ds} + \frac{d\psi_{ds}}{dt} - p_p \omega_m \psi_{qs} \quad (3.109a)$$

$$u_{qs} = r_s i_{qs} + \frac{d\psi_{qs}}{dt} + p_p \omega_m \psi_{ds} \quad (3.109b)$$

$$u_{\alpha r} = r_r i_{\alpha r} + \frac{d\psi_{\alpha r}}{dt} \quad (3.109c)$$

$$u_{\beta r} = r_r i_{\beta r} + \frac{d\psi_{\beta r}}{dt} \quad (3.109d)$$

C. Modelo em coordenadas do campo girante ou de um referencial geral.

Será necessário aplicar uma transformação definida do seguinte modo:

Estator ——— Rotação de um ângulo ρ igual a θ_R

Rotor ——— Rotação de um ângulo ρ igual a $\theta_R - \theta$

O ângulo θ_s representa a coordenada de posição angular de um determinado ponto que rode à velocidade do campo girante. A velocidade deste ponto será ω_r . Note-se que as equações que se irão obter são válidas não só no referencial do campo girante como em qualquer outro referencial que rode a uma velocidade qualquer. A utilização de um referencial síncrono com o campo girante tem a vantagem de que em regime permanente as grandezas são constantes no tempo. Obtém-se segundo 3.100 e 3.101

$$u_{ds} = r_s i_{ds} + \frac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_r \psi_{qs} \quad (3.110a)$$

$$u_{qs} = r_s i_{qs} + \frac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_r \psi_{ds} \quad (3.110b)$$

$$u_{dr} = r_r i_{dr} + \frac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_r - p_p \omega_m) \psi_{qr} \quad (3.110c)$$

$$u_{qr} = r_r i_{qr} + \frac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_r - p_p \omega_m) \psi_{dr} \quad (3.110d)$$

3.9. Aplicação da transformação de Park à Máquina Síncrona de pólos salientes.

Consideremos a figura 3.12. Para que o enrolamento d fique alinhado com o enrolamento f é necessário fazer uma mudança de referencial em que o ângulo da transformação ρ seja igual ao ângulo da posição angular do rotor θ . Assim a transformação será definida como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

A variável i_f mantém-se inalterada nas novas equações. Só nestas condições ($\rho=\theta$) é que a matriz \mathbf{L} podse ser simplificada. Devido ao facto de existirem pólos salientes na máquina existe apenas um referencial onde a transformação de Park simplifica as equações.

Pelas equações 3.100 e 3.101 obtém-se:

$$u_d = r_1 i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - p_p \omega \psi_q \quad (3.112a)$$

$$u_q = r_1 i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + p_p \omega \psi_d \quad (3.112b)$$

$$u_f = r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (3.112c)$$

Exemplo 3.8 Obtenção do modelo da máquina Síncrona através dos produtos matriciais.

As equações da máquina síncrona em coordenadas de Park serão obtidas através dos cálculos apresentados nas equações 3.14 a 3.16. Assim:

Cálculo da matriz dos coeficientes de indução:

$$\text{Cálculo de } \mathbf{L}' = \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} L_{av} + L_{OS} \cos 2\theta & L_{OS} \sin 2\theta & M \cos \theta \\ L_{OS} \sin 2\theta & L_{av} - L_{OS} \cos 2\theta & M \sin \theta \\ M \cos \theta & M \sin \theta & L_f \end{bmatrix} \mathbf{C}$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Executando os cálculos obtém-se:

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M \\ 0 & L_q & 0 \\ M & 0 & L_f \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

que é uma matriz que não depende do ângulo de posição θ . Os seus coeficientes de indução são constantes.

Cálculo $\mathbf{G}' = \mathbf{C}^T [d\mathbf{L}/d\theta] \mathbf{C}$

$$\mathbf{G}' = \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} -2L_{OS} \sin 2\theta & 2L_{OS} \cos 2\theta & -M \sin \theta \\ 2L_{OS} \cos 2\theta & 2L_{OS} \sin 2\theta & M \cos \theta \\ -M \sin \theta & M \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Executando os cálculos, obtém-se:

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 0 & L_d - L_q & 0 \\ L_d - L_q & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Cálculo de $\mathbf{G}'' = \mathbf{C}^T \mathbf{L} [d\mathbf{C}/d\theta]$

$$\mathbf{G}'' = \mathbf{C}^T \mathbf{L} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}'' = \begin{bmatrix} 0 & -L_d & 0 \\ L_q & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

As equações da Máquina Síncrona em variáveis de Park serão:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & \dot{-\theta} L_q & 0 \\ \dot{\theta} L_d & r_q & \dot{\theta} M \\ 0 & 0 & r_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 & M \\ 0 & L_q & 0 \\ M & 0 & L_f \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Por sua vez o binário será:

$$M_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G}' \mathbf{I}'$$

$$M_{em} = \frac{1}{2} [i_d, i_q, i_f] \begin{bmatrix} 0 & L_d - L_q & 0 \\ L_d - L_q & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$M_{em} = \frac{1}{2} \{ (L_d - L_q) I_d I_q + (L_d - L_q) I_d I_q + M I_q i_f + M I_q i_f \}$$

ou seja

$$M_{em} = (L_d - L_q) i_d i_q + M i_q i_f \quad (3.118)$$

O termo $(L_d - L_q) i_d i_q$ é devido ao facto de existir relutância magnética diferente nos dois eixos d e q . Designa-se este termo por binário de relutância. Este binário não existe na Máquina Síncrona de pólos lisos. O termo $M i_q i_f$ resulta da interacção entre os enrolamentos do estator e do rotor. Designa-se por binário síncrono.

NOTA: O binário também poderá ser calculado através dos elementos do modelo proporcionais a ω_m , isto é, através da matriz

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Note-se que:

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \quad (3.120)$$

Assim:

$$\begin{aligned} M_{em} &= \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G}' \mathbf{I}' = \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \{ \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \} \mathbf{I}' \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G} \mathbf{I}' + \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G}^T \mathbf{I}' \end{aligned} \quad (3.121)$$

O binário tal como as suas componentes são matrizes de um por um, isto é, grandezas escalares. Os seus valores não se alteram se se aplicar a propriedade da transposição. O segundo termo é portanto:

$$\frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G}^T \mathbf{I}' = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G}^T \mathbf{I}' \right)^T = \frac{1}{2} \mathbf{I}'^T \mathbf{G} \mathbf{I}' \quad (3.122)$$

aplicando a regra da transposição do produto. As duas componentes do binário são portanto iguais e tem-se:

$$M_{em} = \mathbf{I}'^T \mathbf{G} \mathbf{I}' \quad (3.123)$$

Esquema Equivalente da Máquina Síncrona

Uma vez que os enrolamentos d, q e f se encontram alinhados conforme se indica na figura 3.17, pode concluir-se:

$$\psi_d = L_d i_d + M i_f \quad (3.124a)$$

$$\psi_q = L_q i_q \quad (3.124b)$$

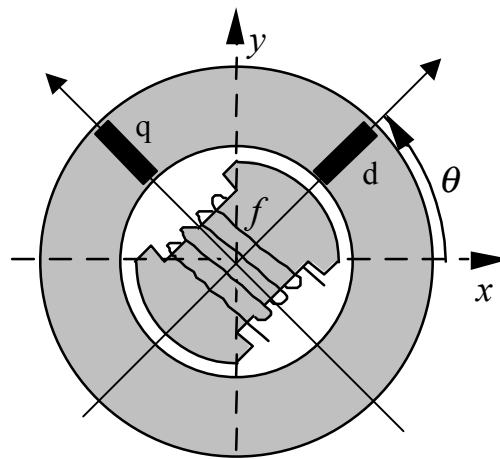


Fig. 3.17. Máquina síncrona de pólos salientes.

Às equações da Máquina Síncrona em coordenadas de Park (3.112) corresponde o esquema equivalente da figura 3.18.

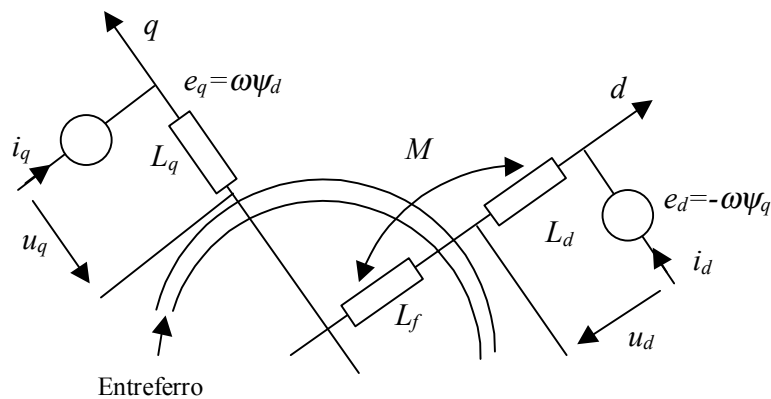


Fig. 3.18. Esquema equivalente da máquina síncrona sem enrolamentos amortecedores.

Máquina Síncrona com enrolamentos amortecedores

Os enrolamentos amortecedores são constituídos por barras em curto-circuito colocadas no rotor. Estes enrolamentos são estacionários com o enrolamento indutor e com o referencial adoptado. Em regime permanente são nulas as correntes que os percorrem porque são estacionários com o campo girante. Podem ser decompostos em dois, um na direcção do eixo d e outro na direcção do eixo q . Como estão colocados no rotor, as suas equações serão semelhantes às equações do enrolamento de excitação. Assim, uma vez que se encontram em curto-circuito, tem-se:

$$0 = r_D i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \quad (3.125a)$$

$$0 = r_Q i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \quad (3.125b)$$

Como, em regime permanente, i_D e i_Q são nulas, estes enrolamentos são frequentemente omitidos para o estudo daquele regime. Em regime transitório, como existe ligação magnética entre os enrolamentos D , f , e d , o fluxo no enrolamento d é a soma das contribuições de 3 componentes: a componente que resulta da indutância própria do enrolamento d e das componentes que resultam das indutâncias mútuas com os enrolamentos f e D . Assim, uma variação da corrente i_D faz-se sentir no equilíbrio das tensões no eixo d . O mesmo se passa entre os enrolamentos q e Q que se encontram alinhados segundo o eixo q .

O modelo matemático da máquina síncrona com enrolamentos amortecedores é constituído pelas equações 3.112 e 3.125, onde:

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + M_{if} i_f + M_{Dd} i_D \\ \psi_q &= L_q i_q + M_{Qq} i_Q \\ \psi_f &= L_f i_f + M_{id} i_d + M_{Df} i_D \\ \psi_D &= L_D i_D + M_{Df} i_f + M_{Dd} i_d \\ \psi_Q &= L_Q i_Q + M_{Qq} i_q \end{aligned} \quad (3.126)$$

O esquema equivalente correspondente encontra-se representado na figura 3.19 onde não se representam todos os coeficientes de indução mútua para não sobrecarregar a figura.

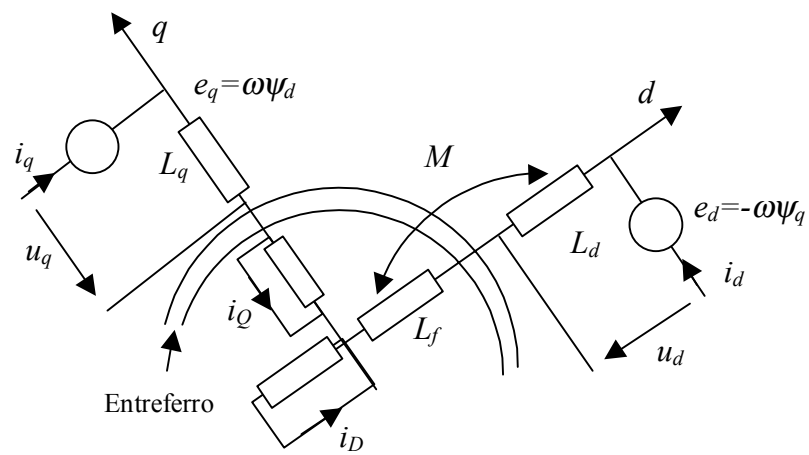


Fig. 3.19. Esquema equivalente da Máquina Síncrona com enrolamentos amortecedores.

3.10. Introdução da notação complexa.

A. Introdução:

Nas secções anteriores, as equações das máquinas eléctricas foram expressas em dois conjuntos diferentes de variáveis reais $\alpha\beta$ e dq . Cada um destes dois conjuntos de variáveis tem um significado físico preciso.

As variáveis $\alpha\beta$ resultam da substituição de um sistema trifásico de condutores desfasados de um terço de período por um sistema bifásico em quadratura. Esta substituição é feita de modo a manter a potência invariante e a criar no entreferro a mesma onda de força magnetomotriz. A natureza da máquina não é alterada. Assim, uma máquina de indução trifásica é substituída por uma máquina de indução bifásica, e uma máquina síncrona trifásica por uma síncrona bifásica.

As variáveis dq resultam do equivalente em termos de quantidades de induzido de uma máquina de comutação com escovas alinhadas com os eixos dos enrolamentos do outro lado (estator ou rotor). Traduzem-se por uma rotação do referencial. Neste caso a natureza da máquina é alterada, isto é, tanto as máquinas de indução como as máquinas síncronas são substituídas por máquinas de comutação equivalentes.

Estas variáveis reais, $\alpha\beta$ e dq são suficientes para o tratamento da maior parte dos problemas das máquinas eléctricas. Há, contudo, outras transformações reais que podem ser usadas em casos especiais e há também transformações complexas que são particularmente úteis noutras situações.

As transformações complexas, que serão introduzidas nesta secção, dão a equivalência complexa das variáveis $\alpha\beta$ ou dq . Assim, a um vector (x,y) no plano faz-se corresponder um número complexo $x+jy$ no plano de Argand.

A equivalência complexa das variáveis $\alpha\beta$ são as variáveis $+/-$ ou componentes simétricas instantâneas e a equivalência complexa das variáveis dq são as componentes fb ou variáveis complexas rotativas.

As transformações complexas foram introduzidas na engenharia electrotécnica por Fortescue no estudo de circuitos polifásicos em regime permanente não equilibrado. Quando aplicada a quantidades que são vectores que representam grandezas sinusoidais em regime permanente, a transformação de Fortescue dá novas variáveis que têm significado físico preciso.

A transformação de componentes simétricas instantâneas foi introduzida por W. V. Lyon e é representada por uma matriz idêntica à da transformação de Fortescue com a diferença de que a transformação de componentes simétricas instantâneas é obtida

transformando variáveis instantâneas enquanto que as componentes simétricas convencionais são obtidas da transformação aplicada aos fasores que representam o regime permanente. A interpretação física destes dois grupos de variáveis é completamente diferente como se verá.

As variáveis fb , que foram introduzidas por Y. H. Ku, podem ser expressas em termos das componentes simétricas instantâneas através de uma rotação de referencial.

A figura 3.20 ilustra a relação entre os vários grupos de variáveis.

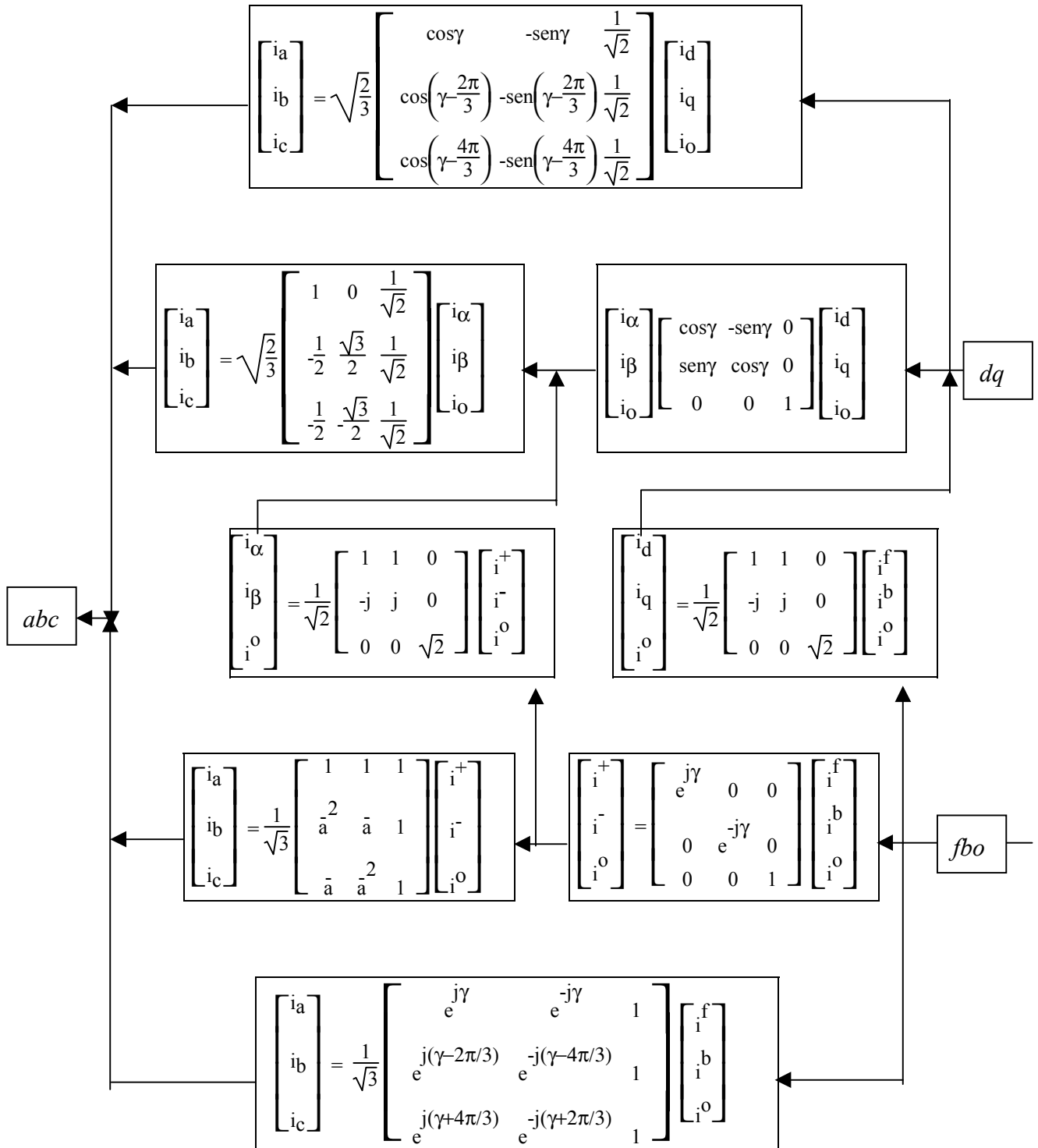


Fig. 3.20 Relação entre os vários grupos de variáveis.

B. Componentes simétricas instantâneas

As variáveis complexas $+/-$ são a equivalência complexa das variáveis $\alpha\beta$. A um vector com duas coordenadas, (i_α, i_β) faz-se corresponder um número complexo $(i_\alpha + j i_\beta)/\sqrt{2}$ e o seu complexo conjugado. Assim:

$$i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_\alpha + j i_\beta) \quad u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_\alpha + j u_\beta) \quad (3.127a)$$

$$i^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_\alpha - j i_\beta) \quad u^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_\alpha - j u_\beta) \quad (3.127b)$$

Como as grandezas $\alpha\beta$ são reais, as componentes $+$ e $-$ são sempre complexas conjugadas.

A transformação será definida:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

donde

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

A matriz \mathbf{C}^{-1} é a transconjugada de \mathbf{C} . Estas matrizes designam-se por matrizes unitárias. O factor $1/\sqrt{2}$ garante que a transformação seja unitária.

Relação entre as componentes simétricas e as variáveis de fase abc

Mantendo a corrente homopolar da transformação de Concordia, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

e como

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Executando os cálculos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.131a)$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \\ \bar{a} & \bar{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i^0 \end{bmatrix} \quad (3.131b)$$

onde

$$\bar{a} = e^{j2\pi/3} \quad (3.132)$$

A matriz de transformação é também uma matriz unitária, isto é, a sua inversa é igual à sua transconjugada.

Exemplo 3.9 Aplicação da transformação de componentes simétricas instantâneas a vários sistemas de tensão.

a) Sistema equilibrado sinusoidal de sequência directa.

Considerando os resultados do exemplo 3.2 e as equações 3.127, tem-se:

$$u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \quad U \quad [\cos(\omega t + \alpha_u) + j \sin(\omega t + \alpha_u)] = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad U \quad e^{j(\omega t + \alpha_u)}$$

$$u^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \quad U \quad [\cos(\omega t + \alpha_u) - j \sin(\omega t + \alpha_u)] = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad U \quad e^{-j(\omega t + \alpha_u)}$$

O vector u^+ roda no sentido positivo à velocidade ω . O vector u^- roda em sentido negativo à mesma velocidade.

b) Sistema equilibrado sinusoidal de sequência inversa.

Tem-se agora:

$$u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3} U [\cos(\omega t + \alpha_u) - j \sin(\omega t + \alpha_u)] = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{-j(\omega t + \alpha_u)}$$

$$u^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3} U [\cos(\omega t + \alpha_u) + j \sin(\omega t + \alpha_u)] = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{j(\omega t + \alpha_u)}$$

c) Sistema sinusoidal desequilibrado.

Consideremos um sistema em coordenadas $\alpha\beta$ desequilibrado. Nestas coordenadas pode escrever-se:

Valores instantâneos

Amplitudes complexas

$$u_\alpha = \sqrt{3} U_\alpha \cos(\omega t + \theta_\alpha)$$

$$\bar{U}_\alpha = \sqrt{3} U_\alpha e^{j\theta_\alpha}$$

$$u_\beta = \sqrt{3} U_\beta \sin(\omega t + \theta_\beta)$$

$$\bar{U}_\beta = -j\sqrt{3} U_\beta e^{j\theta_\beta}$$

Considerando a identidade de Euler, os valores instantâneos das tensões escrevem-se:

$$u_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} U_\alpha (e^{j(\omega t + \theta_\alpha)} + e^{-j(\omega t + \theta_\alpha)}) \quad (3.133a)$$

$$u_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2j} U_\beta (e^{j(\omega t + \theta_\beta)} - e^{-j(\omega t + \theta_\beta)}) \quad (3.133b)$$

Estas expressões podem ser escritas em termos das amplitudes complexas:

$$u_\alpha = \frac{1}{2} (\bar{U}_\alpha e^{j\omega t} + \bar{U}_\alpha^* e^{-j\omega t}) \quad (3.134a)$$

$$u_\beta = \frac{1}{2} (\bar{U}_\beta e^{j\omega t} + \bar{U}_\beta^* e^{-j\omega t}) \quad (3.134b)$$

Aplicando a transformação +/- às componentes instantâneas, obtém-se:

$$u^+ = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\bar{U}_\alpha + j\bar{U}_\beta}{\sqrt{2}} \right) e^{j\omega t} + \left(\frac{\bar{U}_\alpha^* + j\bar{U}_\beta^*}{\sqrt{2}} \right) e^{-j\omega t} \right] \quad (3.135a)$$

$$u^- = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\bar{U}_\alpha - j\bar{U}_\beta}{\sqrt{2}} \right) e^{j\omega t} + \left(\frac{\bar{U}_\alpha^* - j\bar{U}_\beta^*}{\sqrt{2}} \right) e^{-j\omega t} \right] \quad (3.135b)$$

Que se podem escrever:

$$u^+ = \frac{1}{2} (\bar{U}^+ e^{j\omega t} + \bar{U}^{+*} e^{-j\omega t}) \quad (3.136a)$$

$$u^- = \frac{1}{2} (\bar{U}^- e^{j\omega t} + \bar{U}^{-*} e^{-j\omega t}) \quad (3.136b)$$

Onde

\bar{U}^+ e \bar{U}^- são as componentes de Fortescue das amplitudes complexas.

As expressões 3.136 determinam que as componentes (+/-) simétricas instantâneas são formadas tomando as componentes simétricas de

Fortescue ou os seus conjugados e multiplicando respectivamente por $e^{j\omega t}$ ou por $e^{-j\omega t}$. Em regime equilibrado de sequência directa e de sequência inversa, estas equações dão origem às expressões das alíneas anteriores. Com efeito, em regime equilibrado, $U_\alpha = U_\beta = U$ e $\theta_\alpha = \theta_\beta$. As componentes de Fortescue serão:

$$\bar{U}^+ = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{j\theta_\alpha} \quad U^- = 0$$

Como consequência, as componentes simétricas instantâneas tomam a forma:

$$U^+ = \frac{1}{2} \bar{U}^+ e^{j\omega t} \quad U^- = \frac{1}{2} \bar{U}^+ e^{-j\omega t}$$

d) Sistema equilibrado de tensões de onda rectangular.

Aplicando a transformação às figuras do exemplo 3.2 em intervalos de 60° obtém-se a figura 3.21.

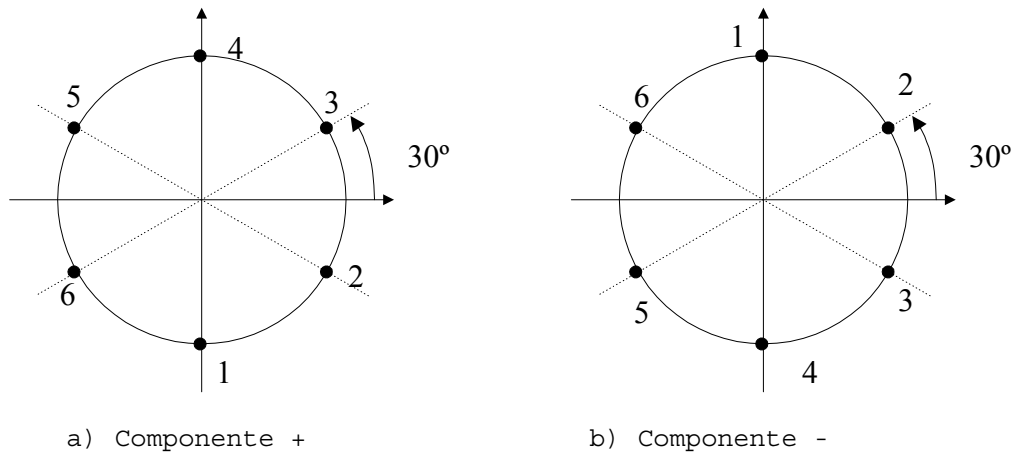


Fig 3.21 Componentes + e - dum sistema de tensões rectangulares.

Obtêm-se apenas 6 pontos que se encontram sobre uma circunferência de raio unitário. Estes 6 pontos encontram-se desfasados de 60° .

As componentes simétricas instantâneas +/- para o regime desequilibrado têm uma dependência no tempo que consiste numa exponencial complexa positiva $e^{j\omega t}$ para a componente de sequência positiva (+) e uma exponencial complexa negativa para a componente de sequência negativa.

Há uma diferença muito importante entre as componentes simétricas instantâneas e as componentes simétricas de Fortescue. Para o regime equilibrado, a componente de amplitude complexa de sequência negativa de Fortescue é nula, mas a componente instantânea não é nula e na realidade é apenas o conjugado da sequência positiva.

Esta diferença leva frequentemente a consideráveis confusões. É necessário aceitar o facto que as componentes simétricas instantâneas serem representações de um conjunto de grandezas variando no tempo.

A relação entre as componentes simétricas de Fortescue e as componentes simétricas instantâneas resume-se à expressão 3.136.

Modelo da máquina de indução em componentes simétricas

Tal como a transformação de Concordia, também esta transformação é uma transformação em que a matriz é traduzida por constantes. Assim não aparecerão termos suplementares nas equações de equilíbrio das tensões. Partindo do modelo da máquina de indução em coordenadas $\alpha\beta$ e aplicando a transformação ao estator e ao rotor, tem-se para a matriz dos coeficientes de indução:

$$\mathbf{C}^{T*} \mathbf{L} \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \\ 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_S & 0 & M \cos \theta & -M \sin \theta \\ 0 & L_S & M \sin \theta & M \cos \theta \\ M \cos \theta & M \sin \theta & L_r & 0 \\ -M \sin \theta & M \cos \theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \\ 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$$

Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} L_S & 0 & M e^{j\theta} & 0 \\ 0 & L_S & 0 & M e^{-j\theta} \\ M e^{-j\theta} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M e^{j\theta} & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Como há desacoplamento entre as grandezas + e -, a matriz 4x4 da equação 3.137 é equivalente a duas matrizes de 2x2. Pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} \psi_s^+ \\ \psi_r^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & M e^{j\theta} \\ M e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^+ \\ i_r^+ \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

e

$$\begin{bmatrix} \psi_s^- \\ \psi_r^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & M e^{-j\theta} \\ M e^{j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^- \\ i_r^- \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

As equações do equilíbrio das tensões escrevem-se simplesmente:

Sequência positiva

$$u_s^+ = r_s i_s^+ + \frac{d\psi_s^+}{dt}$$

$$u_r^+ = r_r i_r^+ + \frac{d\psi_r^+}{dt}$$

Sequência negativa

$$u_s^- = r_s i_s^- + \frac{d\psi_s^-}{dt} \quad (3.140a)$$

$$u_r^- = r_r i_r^- + \frac{d\psi_r^-}{dt} \quad (3.140b)$$

O modelo em coordenadas +/- instantâneas traduz-se por equações que são função de θ tal como as equações em componentes $\alpha\beta$. Este resultado não deve ser de estranhar pois estas variáveis são apenas a tradução complexa das componentes $\alpha\beta$.

Expressões dos binários

Sabemos que o binário se pode escrever em coordenadas $\alpha\beta$:

$$M_{em} = p_p (-\psi_\beta i_\alpha + \psi_\alpha i_\beta) \text{ (grandezas do estator)}$$

e, como:

$$i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_\alpha + j i_\beta)$$

$$i^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_\alpha - j i_\beta)$$

$$\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_\alpha + j \psi_\beta)$$

$$\psi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_\alpha - j \psi_\beta)$$

Verificando que os produtos:

$$\psi^{+*} i^+ = \frac{\psi_\alpha i_\alpha + \psi_\beta i_\beta}{2} + j \frac{-\psi_\beta i_\alpha + \psi_\alpha i_\beta}{2}$$

$$\psi^{-*} i^- = \frac{\psi_\alpha i_\alpha + \psi_\beta i_\beta}{2} + j \frac{\psi_\beta i_\alpha - \psi_\alpha i_\beta}{2}$$

O binário pode ser escrito como:

$$M_{em} = 2 p_p \text{Imag} \left\{ \psi_s^{+*} i_s^+ \right\} = -2 p_p \text{Imag} \left\{ \psi_s^{-*} i_s^- \right\} \quad (3.131)$$

ou

$$M_{em} = p_p \left[\psi_s^{+*} i_s^+ - \psi_s^{-*} i_s^- \right] \quad (3.132)$$

C. Transformação Complexa Rotativa (*fb*)

C1. Definição

Para a maior parte do trabalho analítico há um ganho significativo na facilidade de manuseamento eliminando a dependência de θ das equações do modelo matemático. Isto pode ser feito a partir das componentes \pm instantâneas introduzindo a equivalência complexa da transformação *dq*, que foi introduzida por Y. H. Ku e que é designada por transformação *fb*. A definição destas variáveis pode ser feita de várias maneiras. Seguidamente apresentamos 3 processos equivalentes de definir estas variáveis.

C2. Definição a partir das componentes *dq*

A partir das componentes *dq*, tem-se:

$$i^f = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d + j i_q) \quad u^f = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d + j u_q) \quad (3.143a)$$

$$i^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d - j i_q) \quad u^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d - j u_q) \quad (3.143b)$$

Como as grandezas *dq* são reais, as componentes *fb* são complexas conjugadas.

A transformação será definida:

$$\begin{bmatrix} i^f \\ i^b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

donde

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

A matriz \mathbf{C}^{-1} é a transconjugada de \mathbf{C} .

C3. Definição a partir das componentes \pm

É possível definir estas novas variáveis a partir das componentes simétricas instantâneas. Com efeito tem-se:

$$\begin{bmatrix} i^f \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\rho} & 0 \\ 0 & e^{j\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\rho} & 0 \\ 0 & e^{-j\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^f \\ i^b \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

onde ρ é o ângulo de transformação.

C4. Relação entre as componentes simétricas e as variáveis de fase abc.

Mantendo a corrente homopolar da transformação de Concordia, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i^f \\ i^b \\ i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\rho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i^0 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} i^f \\ i^b \\ i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\rho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (5148)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} i^f \\ i^b \\ i^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{-j\rho} & e^{-j(\rho-2\pi/3)} & e^{-j(\rho-4\pi/3)} \\ e^{j\rho} & e^{j(\rho+4\pi/3)} & e^{j(\rho+2\pi/3)} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Nota: A transformação fb é normalmente aplicada ao rotor da máquina de indução fazendo a mudança de referencial do rotor para o estator (grandezas do rotor). O ângulo de transformação é neste caso $\rho = -\theta$. Em muitos livros a transformação fb é aplicada apenas para este caso e a matriz de transformação vem definida com sinal menos no ângulo utilizando-se o ângulo θ em vez de ρ .

Exemplo 3. 10 " Aplicação da transformação fb a sistemas de tensão. ($\rho = \omega t$)

Tomando como base os resultados do exemplo 3.9 e a definição das componentes fb a partir das equações 3.146, tem-se:

a) Sistema equilibrado sinusoidal de sequência directa.

$$u^f = \sqrt{\frac{3}{2}} \cup e^{j(\omega t + \alpha_u)} e^{-j\omega t} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cup e^{j\alpha_u}$$

$$u^b = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{-(j\omega t + \alpha_u)} e^{j\omega t} = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{-j\alpha_u}$$

Os vectores u^f e u^b são vectores estacionários no plano de Argand.

b) Sistema equilibrado sinusoidal de sequência inversa.

Tem-se agora:

$$u^f = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{-j(\omega t + \alpha_u)} e^{-j\omega t} = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{-j(2\omega t + \alpha_u)}$$

$$u^b = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{(j\omega t + \alpha_u)} e^{j\omega t} = \sqrt{\frac{3}{2}} U e^{j(2\omega t + \alpha_u)}$$

c) Sistema sinusoidal desequilibrado.

Consideremos um sistema em coordenadas $\alpha\beta$ desequilibrado. Nestas coordenadas pode escrever-se:

$$u^+ = \frac{1}{2} (\bar{U}^+ e^{j\omega t} + \bar{U}^{+*} e^{-j\omega t}) \quad (3.150a)$$

$$u^- = \frac{1}{2} (\bar{U}^{+*} e^{-j\omega t} + \bar{U}^- e^{j\omega t}) \quad (3.150b)$$

Onde

\bar{U}^+ e \bar{U}^- são as componentes de Fortescue das amplitudes complexas.

Aplicando as equações 3.146 obtém-se:

$$u^f = \frac{1}{2} (\bar{U}^+ + \bar{U}^{+*} e^{-j2\omega t}) \quad (3.151a)$$

$$u^b = \frac{1}{2} (\bar{U}^{+*} + \bar{U}^- e^{j2\omega t}) \quad (3.151b)$$

d) Sistema equilibrado de tensões de onda rectangular.

Aplicando a transformação às figuras 3.21 em intervalos de 60° obtem-se a figura 3.22. Esta figura é composta por seis arcos de 60° coincidentes.

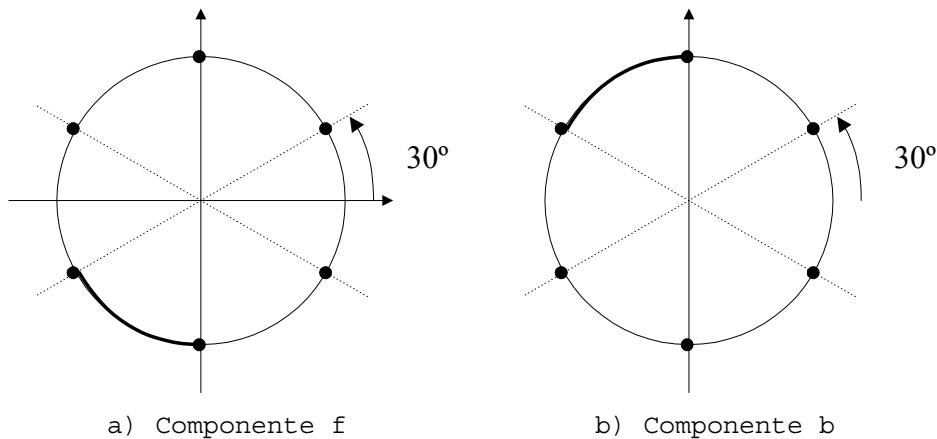


Fig 3.22 Componentes f e b dum sistema de tensões rectangulares.

C5. Modelo da Máquina de indução em coordenadas fb

A partir dos modelos da máquina de indução em coordenadas de Park é possível obter modelos em coordenadas fb .

As componentes f são obtidas somando as equações relativas ao eixo d com as equações relativas ao eixo q multiplicadas por $j=\sqrt{-1}$.

As componentes b são obtidas somando as equações relativas ao eixo d com as equações relativas ao eixo q multiplicadas por $-j=\sqrt{-1}$.

A relação entre os fluxos e as correntes é em qualquer referencial, desde que os eixos do estator estejam alinhados com os eixos do rotor:

$$\begin{bmatrix} \psi_s^f \\ \psi_r^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^f \\ i_r^f \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

e

$$\begin{bmatrix} \psi_s^b \\ \psi_r^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^b \\ i_r^b \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

C.6 Modelo da máquina de indução num referencial do estator (+ - fb)

Considerando as equações 3.107 e aplicando a técnica descrita acima, obtém-se:

$$u_s^f = r_s i_s^f + \frac{d\psi_s^f}{dt} \quad u_s^b = r_s i_s^b + \frac{d\psi_s^b}{dt} \quad (3.154)$$

$$u_r^f = r_r i_r^f + \frac{d\psi_r^f}{dt} - j p_p \omega_m \psi_r^f \quad u_r^b = r_r i_r^b + \frac{d\psi_r^b}{dt} + j p_p \omega_m \psi_r^b \quad (3.155)$$

Como tanto as variáveis $+/-$ como as variáveis fb são complexas conjugadas duas a duas, só é necessário considerar duas equações. O modelo em grandezas $+f$ será assim:

$$\begin{bmatrix} u_s^+ \\ u_r^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_s \frac{d}{dt} & M \frac{d}{dt} \\ M \left(\frac{d}{dt} - j p_p \omega_m \right) & r_r + L_r \left(\frac{d}{dt} - j p_p \omega_m \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^+ \\ i_r^f \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

C.8. Modelo da máquina de indução num referencial do campo girante (f, b):

$$u_s^f = r_s i_s^f + \frac{d\psi_s^f}{dt} + j\omega_R \psi_s^f \quad u_s^b = r_s i_s^b + \frac{d\psi_s^b}{dt} - j\omega_R \psi_s^b \quad (3.157)$$

$$u_r^f = r_r i_r^f + \frac{d\psi_r^f}{dt} + j(\omega_R - p_p \omega_m) \psi_r^f \quad u_r^b = r_r i_r^b + \frac{d\psi_r^b}{dt} - j(\omega_R - p_p \omega_m) \psi_r^b \quad (3.158)$$

Também neste caso, são necessárias apenas duas equações. As componentes b são complexas conjugadas de f . Às componentes f correspondem as equações:

$$\begin{bmatrix} u_s^f \\ u_r^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_s \left(\frac{d}{dt} + j\omega_R \right) & M \left(\frac{d}{dt} + \omega_R \right) \\ M \left[\frac{d}{dt} + j(\omega_R - p_p \omega_m) \right] & r_r + L_r \left[\frac{d}{dt} + j(\omega_R - p_p \omega_m) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^f \\ i_r^f \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Exemplo 3.11 "Esquema equivalente da máquina de indução em regime sinusoidal equilibrado"

Das equações 3.159 pode obter-se o esquema equivalente da máquina de indução em regime sinusoidal e equilibrado. Com efeito, neste referencial as derivadas das variáveis de estado em regime permanente são nulas (ver exemplo 3.10). Este facto traduz-se nas equações 3.159 por fazer $d/dt=0$.

Escrevendo $(\omega - p_p \omega_m)$ em termos do escorregamento s isto é, fazendo

$$(\omega - p_p \omega_m) = s\omega$$

Substituindo na equação 3.159 e dividindo ambos os membros da segunda equação pelo escorregamento s , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} u_s^f \\ \frac{u_r^f}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + j\omega L_s & j\omega M \\ j\omega M & \frac{r_r}{s} + j\omega L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^f \\ i_r^f \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Estas equações traduzem o esquema equivalente da máquina de indução em regime permanente sinusoidal e equilibrado.

Exemplo 3.12 "Esquema equivalente da máquina de indução em

regime sinusoidal desequilibrado com componentes homopolares nulas"

Considere-se uma máquina de indução de rotor em curto-circuito em regime sinusoidal desequilibrado. Para este estudo vamos partir do modelo em variáveis +/-fb. Nestas variáveis a frequência das grandezas do estator e das grandezas do rotor é igual à frequência da tensão de alimentação ω . As componentes simétricas instantâneas podem escrever-se em termos das componentes de Fortescue. Com efeito, e tomando apenas as componentes +/-f (+ grandezas do estator, f grandezas do rotor), tem-se:

$$u^+ = \frac{1}{2} \left(\bar{U}_s^+ e^{j\omega t} + \bar{U}_s^{*} e^{-j\omega t} \right)$$

$$u^f = 0 \quad (\text{rotor em curto-circuito})$$

$$i^+ = \frac{1}{2} \left(\bar{I}_s^+ e^{j\omega t} + \bar{I}_s^{*} e^{-j\omega t} \right)$$

$$i^f = \frac{1}{2} \left(\bar{I}_r^f e^{j\omega t} + \bar{I}_r^{b*} e^{-j\omega t} \right)$$

A partir das equações 3.156, tira-se:

$$\begin{aligned} \left(\bar{U}_s^+ e^{j\omega t} + \bar{U}_s^{*} e^{-j\omega t} \right) &= (r_s + L_s \frac{d}{dt}) \left(\bar{I}_s^+ e^{j\omega t} + \bar{I}_s^{*} e^{-j\omega t} \right) \\ &+ M \frac{d}{dt} \left(\bar{I}_r^f e^{j\omega t} + \bar{I}_r^{b*} e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= M \left(\frac{d}{dt} - j p_p \omega_m \right) \left(\bar{I}_s^+ e^{j\omega t} + \bar{I}_s^{*} e^{-j\omega t} \right) \\ &+ \left[r_r + L_r \left(\frac{d}{dt} - j p_p \omega_m \right) \right] \left(\bar{I}_r^f e^{j\omega t} + \bar{I}_r^{b*} e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

Como estas equações são lineares, pode utilizar-se o princípio da sobreposição para separar os termos em $e^{j\omega t}$ dos termos em $e^{-j\omega t}$.

Obtém-se:

$$\bar{U}_s^+ = (r_s + j\omega L_s) \bar{I}_s^+ + j\omega M \bar{I}_r^f$$

$$0 = j(\omega - p_p \omega_m) M \bar{I}_s^+ + [r_r + j(\omega - p_p \omega_m) L_r] \bar{I}_r^f$$

e

$$\bar{U}_s^{*} = (r_s - j\omega L_s) \bar{I}_s^{*} - j\omega M \bar{I}_r^{b*}$$

$$0 = -j(\omega + p_p \omega_m) M \bar{I}_s^{*} + [r_r - j(\omega + p_p \omega_m) L_r] \bar{I}_r^{b*}$$

Estes dois conjuntos de equações são independentes. Estão escritos em termos das componentes de Fortescue.

Como

$$\omega - p_p \omega_m = s\omega \quad \omega + p_p \omega_m = (2-s)\omega$$

Introduzindo nas equações acima obtém-se:

$$\bar{U}_S^+ = (r_s + j\omega L_s) \bar{I}_S^+ + j\omega M \bar{I}_R^f \quad (3.161a)$$

$$0 = j\omega M \bar{I}_S^+ + \left(\frac{r_r}{s} + j\omega L_r \right) \bar{I}_R^f \quad (3.161b)$$

e

$$\bar{U}_S^- = (r_s + j\omega L_s) \bar{I}_S^- + j\omega M \bar{I}_R^b \quad (3.162a)$$

$$0 = j\omega M \bar{I}_S^- + \left(\frac{r_r}{2-s} + j\omega L_r \right) \bar{I}_R^b \quad (3.162b)$$

A estas equações corresponde o esquema equivalente da figura 3.23.

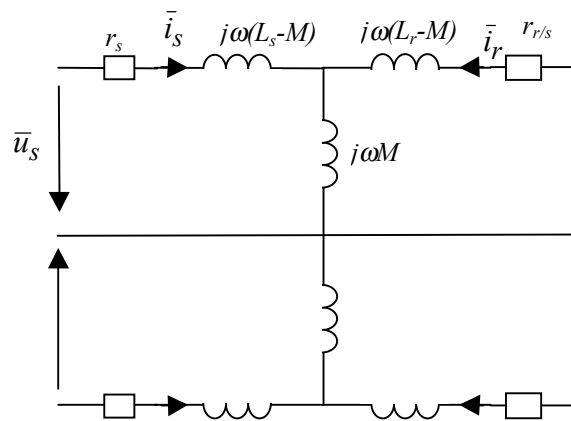


Fig 3.23 Esquema equivalente da máquina de indução em regime desequilibrado.

Vectores espaciais.

Consideremos uma máquina de indução como a representada na figura 3.1. A posição do rotor é representada pelo ângulo θ . A coordenada de um ponto genérico P no entreferro pode ser dada pelo ângulo θ_s no referencial do estator e pelo ângulo θ_r no referencial do rotor. Tem-se:

$$\theta_s = \theta_r + \theta \quad (3.163)$$

No referencial do estator, admitindo distribuição sinusoidal de condutores, a força magnetomotriz produzida pelos 3 enrolamentos do estator escreve-se:

$$F_m(\theta_s, t) = N K_e \left[i_1 \cos \theta_s + i_2 \cos \left(\theta_s - \frac{2\pi}{3} \right) + i_3 \cos \left(\theta_s - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (3.164)$$

Substituindo os termos em coseno pelos seus equivalentes em termos de exponencial complexa e reorganizando, tem-se:

$$\begin{aligned} F_m(\theta_s, t) = N K_e \frac{1}{2} \left[e^{-j\theta_s} \left(i_1 + i_2 e^{j2\pi/3} + i_3 e^{j4\pi/3} \right) \right. \\ \left. + e^{+j\theta_s} \left(i_1 + i_2 e^{-j2\pi/3} + i_3 e^{-j4\pi/3} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.165)$$

Que é a soma de duas grandezas complexas conjugadas. A expressão 3.165 pode escrever-se:

$$F_m(\theta_s, t) = N K_e \frac{1}{2c} \left[e^{-j\theta_s} \tilde{i}_s + e^{+j\theta_s} \tilde{i}_s^* \right] \quad (3.166)$$

onde

$$\tilde{i}_s = c \left(i_1 + i_2 e^{j2\pi/3} + i_3 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.167a)$$

$$\tilde{i}_s^* = c \left(i_1 + i_2 e^{-j2\pi/3} + i_3 e^{-j4\pi/3} \right) \quad (3.167b)$$

O vector \tilde{i}_s é um vector proporcional à componente de sequência positiva instantânea e c uma constante de normalização. Este vector pode ser interpretado como um vector espacial que representa uma distribuição de corrente sinusoidal no espaço.

Do mesmo modo se podem definir os mesmos vectores para a outras grandezas. Naturalmente que não é necessário trabalhar com o par de vectores das equações 3.167 pois este par é complexo conjugado.

Assim, obtém-se:

$$\tilde{u}_s = c \left(u_1 + u_2 e^{j2\pi/3} + u_3 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.168a)$$

$$\tilde{i}_r = c \left(i_4 + i_5 e^{j2\pi/3} + i_6 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.168b)$$

$$\tilde{u}_r = c \left(u_4 + u_5 e^{j2\pi/3} + u_6 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.168c)$$

$$\tilde{\psi}_s = c \left(\psi_1 + \psi_2 e^{j2\pi/3} + \psi_3 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.168d)$$

$$\tilde{\psi}_r = c \left(\psi_4 + \psi_5 e^{j2\pi/3} + \psi_6 e^{j4\pi/3} \right) \quad (3.168e)$$

Poderá definir-se também um vector espacial para representar grandezas internas da máquina. Para a força magnetomotriz, tem-se:

$$\tilde{F}_{ms} = K_e N_s \tilde{i}_s \quad (3.169a)$$

$$\tilde{F}_{mr} = K_e N_s \tilde{i}_r \quad (3.169b)$$

O campo de indução magnética pode ser obtido por:

$$\tilde{B} = \frac{\mu_0}{g} \left(\tilde{F}_{ms} + \tilde{F}_{mr} \right) \quad (3.170)$$

Em que g representa o entreferro.

Esta definição de vectores espaciais permite o conhecimento das grandezas internas da máquina que não são normalmente conhecidas da teoria dos circuitos. Estes vectores foram propostos em 1958 por Kovacs e Racs e tem sido objecto de muito interesse nos últimos anos. O valor da constante de normalização mais utilizado é $c=2/3$. Este valor tem a vantagem de fazer coincidir o valor de pico de uma grandeza de fase com o módulo do respectivo vector espacial como se verá na próxima secção.

Em termos de vectores espaciais as equações da máquina ficam:

$$\tilde{u}_s = r_s \tilde{i}_s + L_s \frac{d\tilde{i}_s}{dt} + M \frac{d}{dt} \left(e^{j\theta} \tilde{i}_r \right) \quad (3.171a)$$

$$\tilde{u}_r = r_r \tilde{i}_r + L_r \frac{d\tilde{i}_r}{dt} + M \frac{d}{dt} \left(e^{j\theta} \tilde{i}_s \right) \quad (3.171b)$$

O vector espacial pode ser interpretado como um vector que tem um módulo proporcional à grandeza que representa e a sua localização no plano de Argand, ou seja o seu argumento, representa a posição no espaço dessa grandeza em ângulos eléctricos. Este assunto será visto de novo na secção seguinte.

3. 11. Transformação de dois eixos standard.

Além da transformação de Park de potência invariante é também muito frequentemente utilizada uma outra transformação que tem algumas propriedades diferentes da transformação acima definida. É conhecida como transformação de Clarke ou por transformação de dois eixos standard. Esta transformação é definida como:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_o \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

A transformação inversa é determinada por:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_o \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

A matriz de transformação é assim:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

Esta transformação é uma transformação de semelhança. As tensões, fluxos e correntes são transformadas através da mesma matriz. Contudo, como $R \neq Q^T$, não é uma transformação ortogonal e a condição de invariância de potência não está assegurada.

Num sistema trifásico, a potência p pode ser calculada por:

$$p = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = U^t I = (TU')^t T I = U' T^t T I \quad (3.175)$$

O produto de $T^t T$ dá:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

Isto significa que, em termos das novas variáveis, se deverá ter:

$$p = \frac{3}{2} (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + 2u_o i_o) \quad (3.177)$$

Quando a componente homopolar for nula ter-se-á:

$$p = \frac{3}{2} (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) \quad (3.178)$$

O factor $\frac{3}{2}$ afecta agora o produto das tensões e correntes nas novas variáveis.

Como a velocidade não é alterada, o mesmo factor afectará também o binário. Assim ter-se-á:

$$M_{em} = \frac{3}{2} \vec{\Psi} \times \vec{I} \quad (3.179)$$

Os valores dos parâmetros, como as resistências, as indutâncias virão inalterados pois as tensões e as correntes são transformadas utilizando a mesma matriz.

Propriedades da transformação de Clarke

A transformação de Clarke goza de algumas propriedades semelhantes à de Concordia. Assim mantêm-se as propriedades:

1. Existe desacoplamento entre as grandezas $\alpha\beta$ e o
2. A matriz é uma matriz de constantes.

Quando a componente homopolar for nula, isto é, quando $X_a + X_b + X_c = 0$, tem-se:

$$X_\alpha = \frac{2}{3} \left[X_a - \frac{1}{2} (X_b + X_c) \right] = X_a \quad (3.180)$$

$$X_\beta = \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \times b - \frac{\sqrt{3}}{2} \times c \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} (X_b - X_c) = \frac{X_b - X_c}{\sqrt{3}} \quad (3.181)$$

As grandezas x_α são iguais às grandezas de fase e as grandezas x_β , à parte o factor $\sqrt{3}$, são iguais às grandezas compostas.

3.12 Vectores espaciais

1. Definição

Os vectores espaciais, introduzidos em 1958 por Kovacs e Racks da Universidade Técnica de Budapeste são hoje uma ferramenta muito utilizada no estudo e controlo das máquinas eléctricas. Estes são definidos como:

$$\tilde{x} = x_\alpha + jx_\beta \quad (3.182)$$

A partir das grandezas de fase tem-se:

$$\tilde{x} = \frac{2}{3} \left(x_a - \frac{1}{2}x_b - \frac{1}{2}x_c \right) + j \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_b - \frac{\sqrt{3}}{2}x_c \right) \quad (3.183)$$

Rearranjando, tem-se:

$$\tilde{x} = \frac{2}{3} \left[x_a + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x_b + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x_c \right] \quad (3.184)$$

definindo:

$$\bar{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.185)$$

tem-se:

$$\tilde{x} = \frac{2}{3} (x_a + \bar{a}x_b + \bar{a}^2x_c) \quad (3.186)$$

2. Interpretação geométrica

A figura 3.23 representa um vector espacial colocado no plano de Argand no ponto P. As suas componentes α e β podem ser obtidas pelas projecções no eixos α e β respectivamente. Do mesmo modo se encontram representados os eixos 1, 2 e 3. As componentes das fases podem também ser obtidas pelas projecções nos eixos 1, 2 e 3.

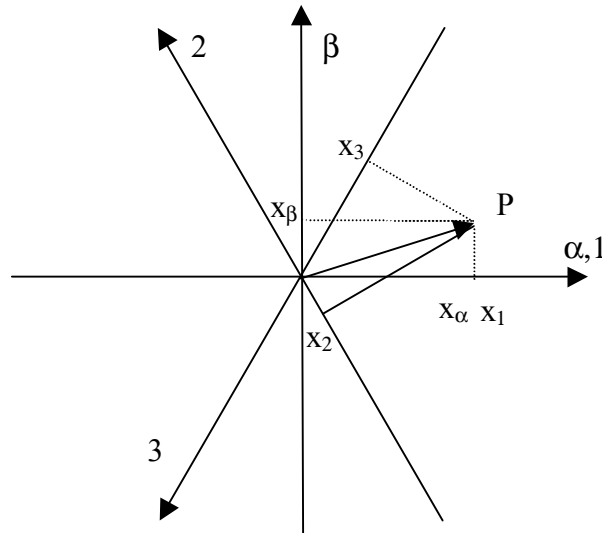


Fig.3.23. Vector espacial no plano de Argand.

Assim, os valores de X_α , X_β bem como de X_a , X_b e X_c são obtidos pela projecção do vector no eixo respectivo.

3. Rotação de referencial

Consideremos um vector espacial no referencial $\alpha\beta$ representado na figura 3.24.

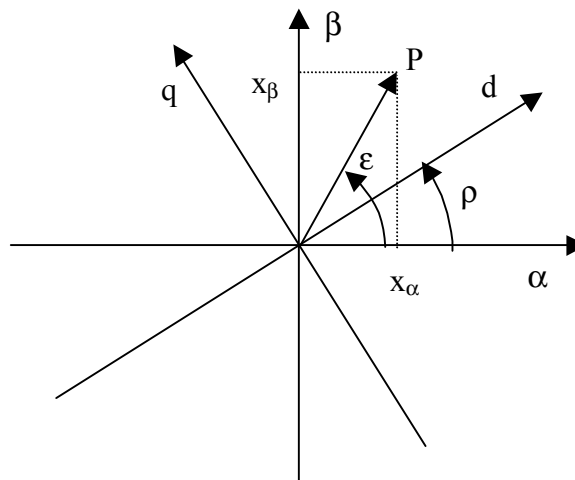


Fig. 3.24. Mudança de referencial no plano de Argand.

No referencial $\alpha\beta$, em coordenadas polares, o vector espacial escreve-se:

$$\tilde{x}_{\alpha\beta} = x_\alpha + jx_\beta = |x|e^{j\epsilon} \quad (3.187)$$

No referencial dq o mesmo vector escreve-se:

$$\tilde{x}_{dq} = x_d + jx_q = |x|e^{j(\varepsilon - \rho)} = \tilde{x}_{\alpha\beta}e^{-j\rho} \quad (3.188)$$

Donde se tem como transformação

$$\tilde{x}_{\alpha\beta} = e^{j\rho} \tilde{x}_{dq} \quad (3.189)$$

A transformação inversa é simplesmente:

$$\tilde{x}_{dq} = e^{-j\rho} \tilde{x}_{\alpha\beta} \quad (3.190)$$

4. Modelo de máquina de indução utilizando vectores espaciais.

Num referencial genérico que rode à velocidade $\dot{\rho} = \omega_R$ o modelo da máquina de indução é dado pelas equações 3.110.

Fazendo:

$$\tilde{u}_s = u_{ds} + ju_{qs} \quad \tilde{i}_s = i_{ds} + ji_{qs} \quad \tilde{\psi}_s = \psi_{ds} + j\psi_{qs} \quad (3.191)$$

$$\tilde{u}_r = u_{dr} + ju_{qr} \quad \tilde{i}_r = i_{dr} + ji_{qr} \quad \tilde{\psi}_r = \psi_{dr} + j\psi_{qr} \quad (3.192)$$

e multiplicando equação(3.110b) por j e adicionando à equação(3.110a) tem-se:

$$\tilde{u}_s = r_s \tilde{i}_s + \frac{d\tilde{\psi}_s}{dt} + j\omega_R \tilde{\psi}_s \quad (3.193)$$

Fazendo as mesmas operações para as equações do rotor, tem-se também:

$$\tilde{u}_r = r_r \tilde{i}_r + \frac{d\tilde{\psi}_r}{dt} + j(\omega_R - p_p \omega_m) \tilde{\psi}_r \quad (3.194)$$

A relação entre os fluxos e as correntes será simplesmente:

$$\tilde{\psi}_s = L_s \tilde{i}_s + M \tilde{i}_r \quad (3.195)$$

$$\tilde{\psi}_r = M \tilde{i}_s + L_r \tilde{i}_r \quad (3.196)$$

Atendendo que não se definem produtos externos no plano de Argand, o binário será dado por:

$$M_{em} = \frac{3}{2} p_p \operatorname{Im} \langle \tilde{\psi}_s \tilde{i}_s^* \rangle \quad (3.197)$$

A simplicidade destas equações permite algum tratamento analítico que seria difícil de executar com outros modelos.

Exemplo 3.13 Modelo de máquina de indução no referencial do estator e no referencial genérico.

Atendendo às equações, o modelo de máquina de indução no referencial do estator será:

$$\tilde{u}_s = r_s \tilde{i}_s + \frac{d\tilde{\psi}_s}{dt} \quad (3.198)$$

$$\tilde{u}_r = r_r \tilde{i}_r + \frac{d\tilde{\psi}_r}{dt} - jp_p \omega_m \tilde{\psi}_r \quad (3.199)$$

Num referencial genérico tem-se:

$$\tilde{x}_{\alpha\beta} = e^{j\rho} \tilde{x}_{dq} \quad (3.200)$$

Onde ρ é o ângulo da transformação. Substituindo nas equações, tem-se para o estator:

$$e^{j\rho} \tilde{u}_{dq} = r_s e^{j\rho} \tilde{i}_{dq} + \frac{d}{dt} \left\{ e^{j\rho} \tilde{\psi}_{dq} \right\} \quad (3.201)$$

desenvolvendo, e tendo em atenção que por definição $\omega_R = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$:

$$e^{j\rho} \tilde{u}_{dq} = r_s e^{j\rho} \tilde{i}_{dq} + j\dot{\rho} e^{j\rho} \tilde{\psi}_{dq} + e^{j\rho} \frac{d\tilde{\psi}_{dq}}{dt} \quad (3.202)$$

Eliminando o elemento $e^{j\rho}$ que é comum aos dois termos de equação, obtém-se:

$$\tilde{u}_{dqs} = r_s \tilde{i}_{dq} + \frac{d\tilde{\psi}_{dq}}{dt} + j\dot{\rho} \tilde{\psi}_{dq} \quad (3.203)$$

Para o rotor obter-se-á:

$$\tilde{u}_{dqr} = r_s \tilde{i}_s + \frac{d\tilde{\psi}_{dq}}{dt} + j(\omega_R - p_p \omega_m) \tilde{\psi}_r \quad (3.204)$$

Esquema equivalente da máquina de indução:

Tal como se fez para as componentes fb também é fácil obter um esquema equivalente para a máquina de indução utilizando vectores espaciais. Os cálculos são semelhantes. A relação entre os fluxos e as correntes pode pôr-se na forma de um esquema equivalente em T.

Para isso tem-se:

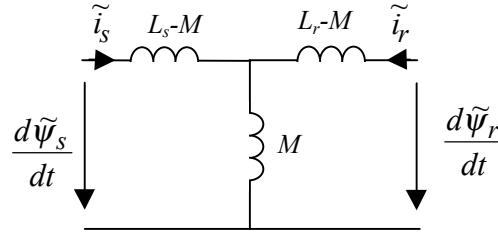


Fig. 3.25. Esquema equivalente representando a relação entre os fluxos e as correntes na máquina de indução.

No referencial do estator, a introdução das equações dá origem a:

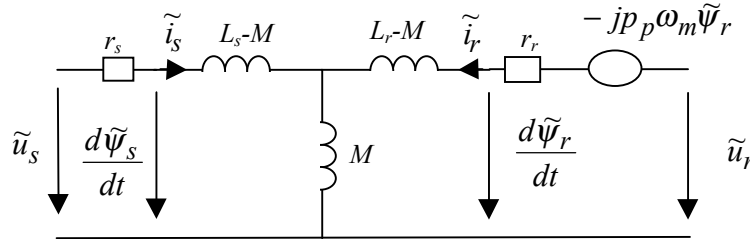


Fig 3.26. Esquema equivalente em regime dinâmico.

Em regime permanente as grandezas do estator têm frequência ω_s enquanto que as grandezas do rotor têm frequências ω_r . Como se está a trabalhar num referencial comum ao estator e ao rotor, estas grandezas vistas do mesmo referencial terão frequências iguais. Considerando o referencial do estator, tem-se:

$$\tilde{x}_s = |x_s| e^{j(\omega_s t + \phi_s)} = \bar{x}_s e^{j\omega_s t} \quad (3.205)$$

$$\tilde{x}_r = |x_r| e^{j(\omega_s t + \phi_r)} = \bar{x}_r e^{j\omega_s t} \quad (3.206)$$

As equações ficarão:

$$\bar{u}_s e^{j\omega_s t} = r_s \bar{i}_s e^{j\omega_s t} + j\omega_s \bar{\psi}_s e^{j\omega_s t} \quad (3.207)$$

$$\bar{u}_r e^{j\omega_s t} = r_r \bar{i}_r e^{j\omega_s t} + j\omega_s \bar{\psi}_r e^{j\omega_s t} - p\omega_m \bar{\psi}_r e^{j\omega_s t} \quad (3.208)$$

Eliminando os termos exponenciais,

$$\bar{u}_s = r_s \bar{i}_s + j\omega_s \bar{\psi}_s \quad (3.209)$$

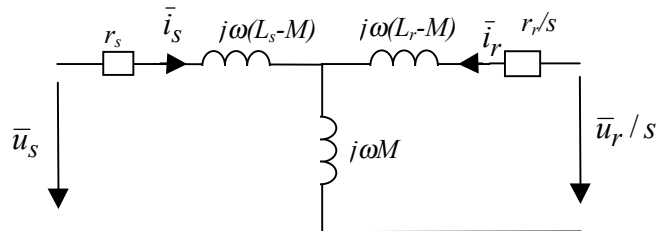
$$\bar{u}_r = r_r \bar{i}_r + j\omega_s \bar{\psi}_r - p_p \omega_m \bar{\psi}_r \quad (3.210)$$

Dividindo ambos os termos da segunda equação pelo escorregamento s , tem-se:

$$\bar{u}_s = r_s \bar{i}_s + j\omega_s \bar{\psi}_s \quad (3.211)$$

$$\frac{\bar{u}_r}{s} = \frac{r_r}{s} \bar{i}_r + j\omega_s \bar{\psi}_r \quad (3.212)$$

E o esquema equivalente um regime estacionário será:



3.27. Esquema equivalente da máquina de indução.

Este é o esquema equivalente clássico de máquina de indução.

Anexo 1: “ Visualização dos coeficientes de indução de uma máquina eléctrica”.

A visualização da forma de onda dos coeficientes é possível para o caso dos coeficientes de indução mútua e dos coeficientes de indução própria. Para este efeito, a máquina encontra-se a rodar a uma determinada velocidade.

Este método utiliza uma fonte de corrente contínua que deverá impôr uma corrente contínua constante apesar da variação possível que o coeficiente e indução própria deva sofrer.

O fluxo num determinado enrolamento é obtido pela integração no tempo da tensão induzida no enrolamento referido. Sendo um coeficiente de indução uma relação entre um fluxo e uma corrente, e sendo a corrente constante, a variação do coeficiente de indução ao longo do tempo será dada pela variação do fluxo também ao longo do tempo. Como a velocidade é constante a posição é uma função linear do tempo. Assim, uma variação no tempo é também uma variação na posição.

Para a visualização de um coeficiente de indução mútua entre dois enrolamentos, é injectada uma corrente contínua num dos dois enrolamentos e é visualizada num osciloscópio a forma de onda da tensão induzida no outro enrolamentos depois de integrada no tempo.

Para a visualização de um coeficiente de indução própria num enrolamento, é injectada uma corrente contínua nesse enrolamento e é visualizada num osciloscópio a forma de onda da tensão induzida no mesmo enrolamento depois de integrada no tempo.

Este processo só permite visualizar o andamento dos coeficientes de indução. Não permite determinar o valor médio destes coeficientes nem as componentes homopolares associadas ao rotor da máquina de indução de rotor bobinado.

Anexo 2: “Aplicação da Transformação de Concordia à Máquina Síncrona”

Transformação $abc \rightarrow \alpha, \beta, 0$.

A matriz dos coeficientes de indução será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ee} & \mathbf{M}_{ef} \\ \mathbf{M}_{ef}^T & \mathbf{L}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{L}_{ee} \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{ef} \\ \mathbf{M}_{ef}^T \mathbf{C} & \mathbf{L}_f \end{bmatrix}$$

Onde \mathbf{C} é a matriz de transformação de Concordia.

1. Cálculo do termo $\mathbf{C}^T \mathbf{L}_{ee} \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{L}_{ee} \mathbf{C} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{12} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{L}_{33} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{L}_{ee} \mathbf{C} &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} - \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}) & \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{M}_{12} - \mathbf{M}_{13}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{11} + \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}) \\ \mathbf{M}_{12} - \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{22} + \mathbf{M}_{23}) & \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{L}_{22} - \mathbf{M}_{23}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{L}_{22} + \mathbf{M}_{23}) \\ \mathbf{M}_{13} - \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{23} + \mathbf{L}_{33}) & \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{M}_{23} - \mathbf{L}_{33}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{M}_{13} + \mathbf{M}_{23} + \mathbf{L}_{33}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde:

$$\mathbf{L}_{\alpha\alpha} = \frac{2}{3} \left[\mathbf{L}_{11} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{12} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{13} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{12} + \frac{1}{4}\mathbf{L}_{22} + \frac{1}{4}\mathbf{M}_{23} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{13} + \frac{1}{4}\mathbf{M}_{23} + \frac{1}{4}\mathbf{L}_{33} \right]$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{M}_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{M}_{13} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{L}_{22} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{M}_{23} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{M}_{23} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{L}_{33} \right]$$

$$\mathbf{L}_{\beta\alpha} = \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{M}_{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{L}_{22} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{M}_{23} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{M}_{13} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{M}_{23} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{L}_{33} \right]$$

$$\mathbf{L}_{\beta\beta} = \frac{2}{3} \frac{3}{4} [\mathbf{L}_{22} - \mathbf{M}_{23} - \mathbf{M}_{23} + \mathbf{L}_{33}]$$

Simplificando, obtém-se:

$$\mathbf{L}_{\alpha\alpha} = \frac{2}{3} \left[\mathbf{L}_{11} + \frac{1}{4}\mathbf{L}_{22} + \frac{1}{4}\mathbf{L}_{33} - \mathbf{M}_{13} - \mathbf{M}_{12} + \frac{1}{2}\mathbf{M}_{23} \right]$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}L_{33} - \frac{1}{2}L_{22} + M_{12} - M_{13} \right]$$

$$L_{\beta\beta} = \frac{1}{2} [L_{22} + L_{33} - 2 M_{23}]$$

Substituindo pelas expressões 3.7 e 3.8 desprezando a 4ª harmónica, obtém-se:

A. Coeficiente de auto-indução do enrolamento α

$$\begin{aligned} L_{\alpha\alpha} &= \frac{2}{3} \left[L_a + L_b \cos 2\theta + \frac{1}{4} L_a + \frac{1}{4} L_b \cos 2\theta_3 + \frac{1}{4} L_a + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} L_b \cos 2\theta_2 - M_a - M_b \cos 2\theta_3 - M_a - M_b \cos 2\theta_2 + \frac{1}{2} M_a + \frac{1}{2} M_b \cos 2\theta \right] \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{3}{2} L_a - \frac{3}{2} M_a + L_b \left[\cos 2\theta + \frac{1}{4} (\cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2) \right] - M_b \left[\cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2 - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{como } \cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2 = -\cos 2\theta$$

$$L_{\alpha\alpha} = L_a - M_a + \frac{2}{3} L_b \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{2}{3} M_b \frac{3}{2} \cos 2\theta$$

$$L_{\alpha\alpha} = (L_a - M_a) + \left(\frac{L_b}{2} + M_b \right) \cos 2\theta$$

B. Coeficiente de indução mútua $\alpha\beta$

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} L_a + \frac{1}{2} L_b \cos 2\theta_2 - \frac{1}{2} L_a - \frac{1}{2} L_b \cos 2\theta_3 + M_a + M_b \cos 2\theta_2 - M_a - M_b \cos 2\theta_3 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} L_b (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_3) + M_b (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_3) \right] \end{aligned}$$

$$\text{como } \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_3 = \sqrt{3} \sin 2\theta$$

$$L_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} L_b + M_b \right) \sin 2\theta$$

C. Coeficiente de auto-indução do enrolamento β

$$L_{\beta\beta} = \frac{1}{2} [L_a + L_b \cos 2\theta_3 + L_a + L_b \cos 2\theta_2 - 2M_a - 2M_b \cos 2\theta]$$

$$= L_a - M_a + \frac{L_b}{2} (\cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2) - M_b \cos 2\theta$$

$$L_{\beta\beta} = (L_a + M_a) - \left(\frac{L_b}{2} + M_b \right) \cos 2\theta$$

D. Cálculo dos termos homopolares

$$L_{00} = \frac{2}{3} \frac{1}{2} [L_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{12} + L_{22} + M_{23} + M_{13} + M_{23} + L_{33}]$$

$$= \frac{1}{3} [L_{11} + L_{22} + L_{33} + 2M_{12} + 2M_{13} + 2M_{23}]$$

$$L_{\alpha 0} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[L_{11} + M_{12} + M_{13} - \frac{1}{2}M_{12} - \frac{1}{2}L_{22} - \frac{1}{2}M_{23} - \frac{1}{2}M_{13} - \frac{1}{2}M_{23} - \frac{1}{2}L_{33} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[L_{11} - \frac{1}{2}L_{22} - \frac{1}{2}L_{33} + \frac{1}{2}M_{12} + \frac{1}{2}M_{13} - M_{23} \right]$$

$$L_{\beta 0} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} [M_{12} + L_{22} + M_{23} - M_{13} - M_{23} - L_{33}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} [L_{22} - L_{33} + M_{12} - M_{13}]$$

Execução dos cálculos dos termos homopolares

$$L_{00} = \frac{1}{3} (L_a + L_b \cos 2\theta + L_a + L_b \cos 2\theta_3 + L_a + L_b \cos 2\theta_2 + 2M_a + 2M_b \cos 2\theta_2 + 2M_a + 2M_b \cos 2\theta + 2M_a + 2M_b \cos 2\theta_3)$$

$$L_{00} = L_a + 2M_a$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha 0} &= \frac{\sqrt{2}}{3} (L_a + L_b \cos 2\theta - \frac{1}{2}L_a - \frac{1}{2}L_b \cos 2\theta_3 - \frac{1}{2}L_a - \frac{1}{2}L_b \cos 2\theta_2 + \frac{1}{2}M_a \\ &\quad + \frac{1}{2}M_a + \frac{1}{2}M_b \cos 2\theta + \frac{1}{2}M_a + \frac{1}{2}M_b \cos 2\theta_3 - M_a - M_b \cos 2\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[L_b \left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}[\cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2] \right) - M_b \left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}[\cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_2] \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{3}{2}L_b \cos 2\theta - M_b \frac{3}{2} \cos 2\theta \right] \end{aligned}$$

$$L_{\alpha 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_b - M_b) \cos 2\theta$$

$$L_{\beta 0} = \frac{1}{\sqrt{6}} [L_a + L_b \cos 2\theta_3 - L_a - L_b \cos 2\theta_2 + M_a + M_b \cos 2\theta_2 - M_a - M_b \cos 2\theta_3]$$

$$L_{\beta 0} = \frac{1}{\sqrt{6}} (-L_b \sqrt{3} \sin 2\theta + M_b \sqrt{3} \sin 2\theta)$$

$$L_{\beta 0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (L_b - M_b) \sin 2\theta$$

2. Coeficiente de indução mútua entre estator e rotor.

Cálculo de $C^T M_{ef}$

$$\begin{aligned} C^T M_{ef} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} M_F \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos \theta_3 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} M_F \begin{bmatrix} \cos \theta - \frac{1}{2}(\cos \theta_3 + \cos \theta_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos \theta_3 - \cos \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} M_F \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_F \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercícios de revisão

I

- a) Mostre que qualquer transformação de potência invariante, real, de 2x2, ortogonal, deve ser da forma:

$$C = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \quad \text{onde } x^2 + y^2 = 1$$

ou a sua transposta.

A sua resposta deverá consistir em duas partes: primeiro mostrando que a transformação acima mencionada tem as condições requeridas, segundo mostrando que mais nenhuma transformação obedece a tais condições.

- b) No caso especial da equação matricial

$$E = \frac{d}{dt}(LI)$$

onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1+2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \\ \sin^2\theta-\cos^2\theta & 1-2\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

Faça a transformação real de potência invariante

$$\mathbf{C}\mathbf{E}' = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{I}' = \mathbf{I}$$

onde

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}' = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

para obter a nova equação

$$\mathbf{E}' = \mathbf{L}' \frac{d}{dt} \mathbf{I}' + \mathbf{B}'\mathbf{I}'$$

determine \mathbf{L}' e \mathbf{B}'

II

Uma máquina de pólos lisos é descrita em coordenadas $\alpha\beta$ no estator e dq no rotor, através das equações:

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha s} \\ u_{\beta s} \\ u_{dr} \\ u_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 & 0 \\ 0 & M\dot{\theta} & r_r & L_r\dot{\theta} \\ -M\dot{\theta} & 0 & -L_r\dot{\theta} & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}$$

$$M_{em} = M(-i_{\alpha} i_{q} + i_{\beta} i_d)$$

Deseja fazer-se uma mudança de referencial e escrever as equações da mesma máquina num novo referencial, designado por $12,fb$, que é relacionado com o referencial anterior através de:

$$\mathbf{U}_{\alpha\beta,dq} = \mathbf{A} \mathbf{U}_{12,fb}$$

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta,dq} = \mathbf{A} \mathbf{I}_{12,fb}$$

onde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -j & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -j & j \end{bmatrix}$$

a) Calcular, através de operações matriciais, os elementos das novas matrizes das impedâncias em termos dos elementos das matrizes originais.

b) Calcule uma nova expressão do binário em termos das novas grandezas.

III

Considere uma máquina assíncrona em coordenadas $\alpha \beta$.

- 1.a Obtenha um novo modelo fazendo uma transformação das grandezas do rotor para o referencial do estator.
- 1.b Qual a frequência, em regime permanente das novas variáveis que representam o rotor ?
- 2.a Obtenha um segundo modelo fazendo uma transformação de grandezas do estator para o referencial do rotor.
- 2.b Qual a frequência, em regime permanente, das novas variáveis que representam o rotor ?
- 3.a Obtenha um terceiro modelo fazendo uma transformação de grandezas do estator e uma outra transformação de grandezas do rotor para um referencial síncrono com o campo girante.
- 3.b Qual as frequências, em regime permanente, das novas variáveis que representam o estator e o rotor ?
4. Determine a expressão do binário para cada um dos 3 modelos que determinou.

IV

Máquina assíncrona monofásica

Considere uma máquina eléctrica rotativa de pólos lisos. Esta máquina tem um

enrolamento monofásico sinusoidalmente distribuído no estator cujo coeficiente de auto-indução é $0,1\text{H}$. A sua resistência é $0,5\Omega$. O rotor é constituído por uma gaiola de esquilo com 21 barras enviesadas. Com a máquina parada, o coeficiente de indução visto do estator é $0,01\text{H}$ e a resistência equivalente igual a 1Ω .

1. Estabeleça um modelo matemático para esta máquina. Determine os valores dos parâmetros que nele figuram.

Sugestão: Considere a gaiola de esquilo do rotor equivalente a dois enrolamentos em quadratura sinusoidalmente distribuídos e em curto-circuito.

2. Faça uma mudança de variáveis no rotor de modo a que a frequência das correntes deste seja igual à frequência das correntes do estator. Obtenha o novo modelo matemático. (Equações eléctricas e equações do binário).
3. Qual a frequência das correntes do rotor em função da velocidade ?
4. O enrolamento do estator encontra-se alimentado em corrente contínua.
 - 4.1 - Determine o modelo da máquina em regime permanente.
 - 4.2 - Qual a relação entre o binário e a corrente de excitação ?
5. O enrolamento do estator encontra-se alimentado em corrente alternada.
 - 5.1 - Determine o modelo da máquina em regime permanente.
 - 5.2 - Qual o valor da impedância complexa vista do estator
 - 5.3 - Qual a relação entre o binário e a corrente no estator em função da velocidade.
 - 5.4 - Determine a característica electromecânica da máquina.

V

Estudo do transformador trifásico utilizando a teoria dos circuitos.

A relação entre os fluxos ligados e as correntes de um transformador trifásico pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{11} & M_{11} & M_p & M_s & M_s \\ M_{11} & L_{11} & M_{11} & M_s & M_p & M_s \\ M_{11} & M_{11} & L_{11} & M_s & M_s & M_p \\ M_p & M_s & M_s & L_{22} & M_{22} & M_{22} \\ M_s & M_p & M_s & M_{22} & L_{22} & M_{22} \\ M_s & M_s & M_p & M_{22} & M_{22} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

- a) Quais as simplificações que estão assumidas neste modelo ?

- b) Aplicando a transformação de Concordia, determine um novo modelo para esta máquina. Comente.
- c) A partir dos resultados da alínea b) determine um modelo válido para o estudo do regime transitório. Como determinaria experimentalmente os parâmetros que figuram neste modelo. Admita que este transformador se encontra ligado em estrela/triângulo.

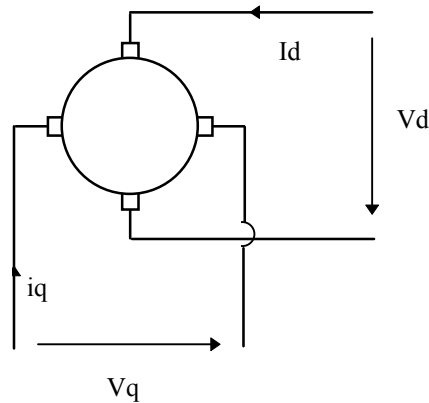
VI

O estudo do regime transitório das máquinas eléctricas é realizado utilizando sistemas de equações diferenciais. Estes sistemas podem tomar formas extremamente complexas quando se utilizam como variáveis de estado as correntes nos enrolamentos. Com o objectivo da simplificação das equações utilizam-se métodos que se baseiam em mudanças de variáveis.

Faça uma exposição destes métodos indicando, quando possível, a interpretação física das várias operações que se efectuam. Para ilustrar a sua exposição utilize, à sua escolha, uma máquina síncrona ou uma máquina assíncrona. Refira-se às diferentes frequências que se podem encontrar nos vários modelos e nas diversas variáveis.

VII

Um rotor cilíndrico uma máquina de corrente contínua é colocado no interior de um estator também cilíndrico sem enrolamentos. Este estator serve apenas para completar um caminho de baixa relutância para o circuito magnético. Sobre o colector deste rotor encontram-se dois pares de escovas como se representam na figura. Entre duas escovas opostas definem-se a resistência R_r e a indutância L_r .



Considere que os ângulos são medidos segundo o sentido positivo trigonométrico e que o eixo q se encontra em quadratura e em avanço em relação ao eixo d . Considere também que a máquina roda no sentido positivo.

- Escreva as relações entre as tensões e as correntes que determinam o comportamento transitório desta máquina utilizando o sistema de variáveis dq , e mostre em detalhe como transformar estas relações num conjunto equivalente em variáveis complexas fb . Qual é o binário electromagnético desenvolvido por esta máquina?
- Considere velocidade constante e regime DC em regime permanente. É aplicada uma tensão constante sobre as escovas que se encontram alinhadas com o eixo q . As escovas que se encontram alinhadas com o eixo d encontram-se ligadas a uma resistência de carga variável. Desprezando as quedas de tensão resistivas comparadas com as quedas de tensão de velocidade, calcule a corrente na resistência de carga. Descreva numa frase a característica deste modo de operação. (utilize variáveis dq).
- Considere velocidade constante e o regime permanente sinusoidal. Encontra-se aplicado às escovas um conjunto de tensões dado por:

$$v_d = V_m \cos \omega t$$

$$v_q = V_m \sin \omega t$$

Obtenha as relações de regime permanente entre as tensões e as correntes expressas na notação complexa convencional utilizada normalmente para representar grandezas sinusoidais. Como poderá compensar a potência reactiva com este sistema?

VIII

Pretende-se estudar um servomotor bifásico e bipolar que se encontra esquematizado na figura. As constantes são:

$$R_s = 60\Omega$$

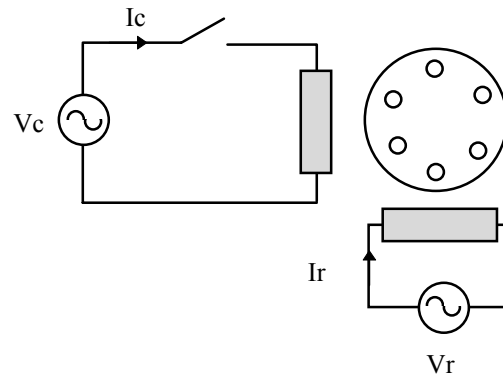
$$R_r = 450\Omega$$

$$\omega(L_s - L_m) = 230\Omega$$

$$\omega(L_r - L_m) = 85\Omega$$

$$\omega L_m = 385\Omega$$

$$\omega = 2\pi 400 \text{ rad/s}$$



- Determine um modelo matemático para o estudo deste servomotor.
- Calcule o binário médio em regime permanente em Nm para uma velocidade de 6000 rpm e uma tensão aplicada de 230V (valor eficaz) da fase de referência (V_r) e 115V (valor eficaz) na fase de controlo (V_c) estando estas duas formas de onda em quadratura.
- Para uma velocidade de 6000 rpm calcule o binário médio de regime permanente desenvolvido quando o interruptor se encontra aberto e a fase de referência tem 230V aplicados.

Capítulo 4

Modelização de sistemas electromecânicos com comutação

Neste capítulo apresenta-se a modelização de sistemas electromecânicos com comutação. Para isso utiliza-se como ferramenta fundamental a teoria da transformação de Park. Esta é baseada nas equações 4.1.

$$\begin{aligned} u_d &= r_a i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_R \psi_q \\ u_q &= r_a i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega_R \psi_d \end{aligned} \quad (4.1)$$

A técnica utilizada consiste em escolher o referencial que esteja associado à corrente.

Apresentam-se em pormenor dois casos: a máquina de corrente contínua de colectores e a geratriz de rectificação. Nas máquinas de corrente contínua com comutação mecânica, realizada com um comutador, este referencial é coincidente com o estator. Neste caso os condutores do rotor estão em movimento e as correntes estão estacionárias sendo a sua posição determinada pela localização das escovas que se encontram sobre o comutador ou colectores. Nas geratrizes de rectificação tem-se comutação electrónica. A modelização é feita utilizando-se um referencial em movimento coincidente com a corrente. Em ambos os casos, devido à comutação, os condutores e o campo criado deslocam-se a velocidades diferentes. Em vez da teoria de Park, para o mesmo fim, poderia utilizar-se alternativamente a teoria dos contactos deslizantes estabelecida pelo Prof. Garrido nos anos 70. Embora as expressões matemáticas usadas neste capítulo tenham a sua origem na teoria de Park, os conceitos e

a sua aplicação resultam da teoria dos contactos deslizantes. Utiliza-se esta estratégia pois daqui resulta uma simplificação matemática considerável.

Na teoria dos contactos deslizantes distinguem-se dois tipos de circuitos: os circuitos do tipo filiforme, caracterizados por ausência de comutação e que obedecem à lei geral de indução, e os circuitos de comutação ou de contactos deslizantes. Nestes circuitos a corrente e a matéria que serve de suporte físico para ela, não se deslocam à mesma velocidade. Isto é possível pelo facto de haver comutação. Para este tipo de circuitos o Prof. M. S. Garrido estabeleceu uma equação de equilíbrio de tensões. Para se obter um modelo matemático de um determinado sistema electromecânico é necessário escrever a equação dos contactos deslizantes e uma equação que determine a posição das correntes, ou das escovas fictícias que as determinam. Estas duas equações são equivalentes às equações 4.1.

4.1. Modelização da Máquina de Corrente Contínua com pólos de comutação e enrolamentos de compensação

A figura 4.1 apresenta um esquema em corte de uma máquina de corrente contínua com um par de pólos. O colector não está representado, mas pressupõe-se que o seu funcionamento provoca uma distribuição fixa no espaço de correntes no rotor apesar deste rodar a uma velocidade qualquer que designaremos por ω_m .

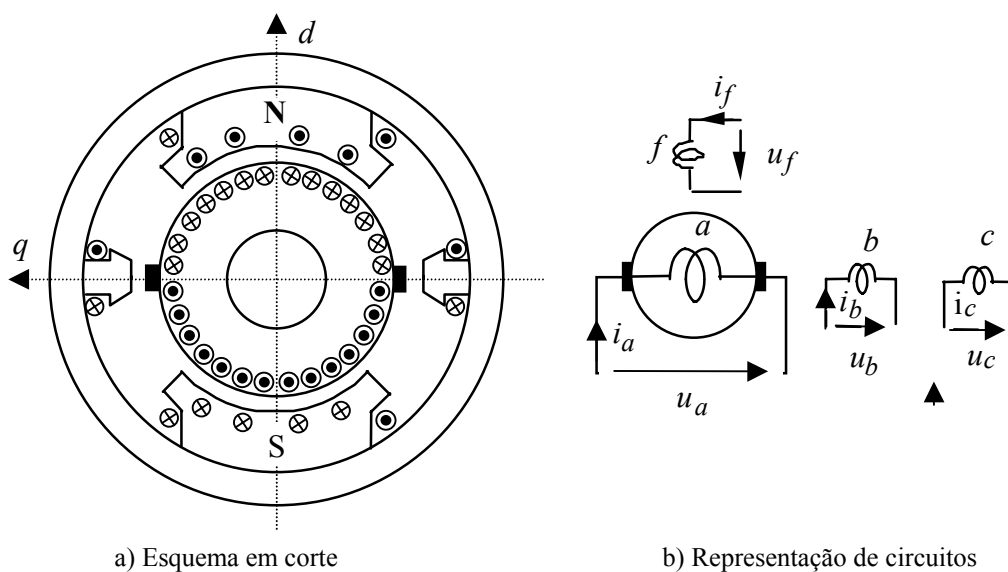


Fig. 4.1 Esquema em corte da máquina DC com um par de pólos

As escovas estão fixas no espaço devido às características de construção da máquina. No referencial adoptado, figura 4.1, as escovas encontram-se sobre o eixo q .

Os enrolamentos fundamentais neste tipo de máquina são o enrolamento de campo (que representaremos pela letra f) do tipo filiforme, e o enrolamento do induzido (letra a) do tipo de comutação. Os enrolamentos de compensação (letra b) são do tipo filiforme e destinam-se a compensar a reacção magnética do induzido traduzida pela deformação da onda de F.m.m. ao longo da periferia. Os enrolamentos de comutação (letra c) são do tipo filiforme e destinam-se a compensar o deslocamento da linha neutra à medida que a corrente i_a sobe, e a evitar que esta se afaste da posição das escovas provocando mau funcionamento do colector. Estes dois enrolamentos são percorridos pela corrente do induzido i_a .

Para a modelização desta máquina vamos escrever a matriz dos coeficientes de indução considerando que cada um dos 4 enrolamentos é percorrido por uma corrente diferente. Assim:

i_f - corrente de excitação

i_c - corrente de comutação

i_b - corrente de compensação

i_a - corrente no induzido

A colocação dos enrolamentos c , b e a em série obtém-se fazendo $i_c=i_b=i_a$ e somando as tensões respectivas. Obter-se-ão as equações de equilíbrio eléctrico da máquina.

A figura 4.1b mostra a posição relativa dos 4 circuitos referidos.

Para a modelização do circuito do induzido, visto que os condutores rodam à velocidade ω_m e que o campo criado pelas correntes que os atravessam é estacionário, considera-se que o efeito do colector e escovas corresponde a uma transformação de rotação de referencial

Considere-se assim a figura 4.2 onde os enrolamentos do rotor são substituídos por um par de enrolamentos $\alpha\beta$ equivalentes.

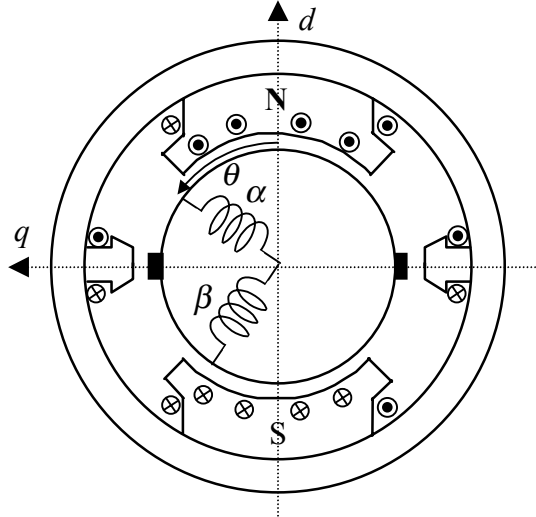


Figura 4.2. Representação dos enrolamentos do rotor por um par $\alpha\beta$ equivalente.

Fazendo uma transformação rotação de referencial aos enrolamentos $\alpha\beta$ de angulo de transformação $\rho = -\theta$, o enrolamento α vai ficar alinhado com o eixo d e o enrolamento β vai ficar alinhado com o eixo q . O colector impõe as condições:

$$i_d = 0 \quad i_q = i_a \quad (4.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{d\psi_d}{dt} + \omega_m \psi_q \\ u_q &= r_a i_a + \frac{d\psi_q}{dt} - \omega_m \psi_d \end{aligned} \quad (4.3)$$

Onde os fluxos ψ_d e ψ_q são os fluxos ligados com os enrolamentos d e q .

Como o rotor é cilíndrico, os termos de indutância mútua entre circuitos em quadratura são nulos. Considerando que as escovas estão situadas num ângulo igual a $\pi/2$ em relação ao enrolamento de excitação, obtém-se para a matriz dos coeficientes de indução:

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_c \\ \psi_b \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & -M & 0 & 0 & 0 \\ -M & L_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_c & M_{bc} & M_{ca} \\ 0 & 0 & M_{bc} & L_b & M_{ba} \\ 0 & 0 & M_{ca} & M_{ba} & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_d \\ i_c \\ i_b \\ i_a \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

O coeficiente de indução mútua entre f e d é negativo e é igual a $-M$. Este facto pode ser facilmente visto quando se rodar as escovas de -90° . Os enrolamentos d e de f estão enrolados do modo a criarem campos que de subtraem, ver figura 4.3.

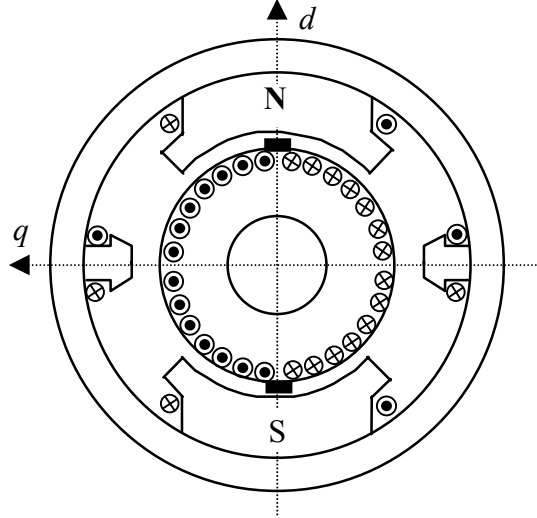


Figura 4.3: Rotação das escovas de -90° . Mútua entre o eixo d e f .

As equações do equilíbrio das tensões relativas aos circuitos f , c e b são escritas no referencial do estator não necessitando de nenhuma transformação. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} u_f &= r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \\ u_b &= r_b i_b + \frac{d\psi_b}{dt} \\ u_c &= r_c i_c + \frac{d\psi_c}{dt} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Obtenção do modelo da máquina de corrente contínua

Como os enrolamentos de comutação e compensação estão em série com o circuito do induzido:

$$(i_c = i_b = i_a) \quad ; \quad (r_t = r_a + r_c + r_b) \quad \text{e} \quad (u_t = u_a + u_b + u_c) \quad (4.6)$$

Utilizando as equações 4.3 a 4.5, vem:

$$u_f = r_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (4.7)$$

$$u_t = r_t i_a + L_t \frac{di_a}{dt} + \omega_m M i_f \quad (4.8)$$

Com:

$$L_t = (L_a + L_b + L_c) + 2(M_{bc} + M_{ca} + M_{ba}) \quad (4.9)$$

As equações 4.7 a 4.9 traduzem o comportamento eléctrico da máquina DC.

A equação do binário fica:

$$M_{em} = -\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r = -\psi_d i_a = M i_f i_a \quad (4.10)$$

As equações 4.7 a 4.9 bem como a equação do binário 4.10 constituem o modelo da máquina DC normalmente utilizado no estudo dos regimes transitórios.

Exemplo 4.1 "Modelização do transformador Metadínico"

O transformador metadínico consiste num enrolamento induzido colocado no rotor, com dois pares de escovas em quadratura no espaço como se mostra na figura 4.4. Não existem enrolamentos no estator e a máquina pode ser considerada como tendo entreferro constante. Desprezam-se também os efeitos da saturação magnética. Embora não sendo verdade, para simplificar os cálculos, considere que os enrolamentos são sinusoidalmente distribuídos.

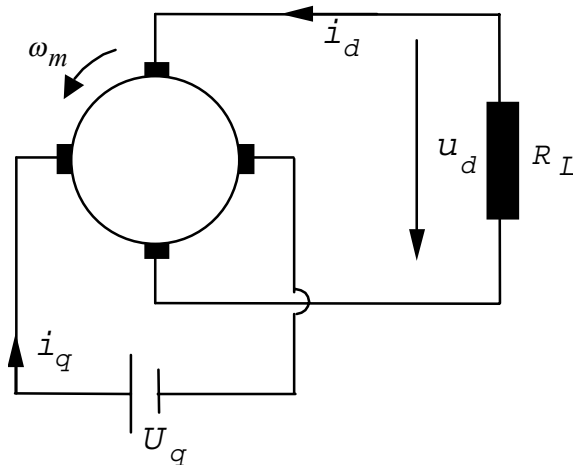


Fig. 4.4: esquema do transformador metadínico.

O induzido é accionado à velocidade constante ω_m . A tensão U_q aplicada ao eixo em quadratura é constante. Ao eixo d (designado por eixo directo) é aplicada uma carga resistiva R_L .

Fazendo as simplificações que achar necessárias:

- Determinar as expressões dos coeficientes de indução dos dois circuitos.
- Determinar as equações eléctricas relacionadas com os eixos d e q.
- Determinar a expressão do binário em função das correntes.
- Determinar o modelo de estado do sistema.
- Determinar as expressões de regime permanente. Calcular I_q e I_d em função de R_L e U_q .
- Comente a afirmação "O transformador metadínico comporta-se como uma fonte de corrente constante (independente de R_L)".

- g) Quais as consequências de um curto-circuito na carga? E de um circuito aberto?
 h) Faça o balanço energético do sistema.

Sugestão para as alíneas f, g, h: Fazer um pré-cálculo simplificado considerando a resistência do induzido nula.

Resolução.

- a) Como o entreferro é liso, os coeficientes de auto-indução são constantes e os coeficientes de indução mútua são funções do coseno do ângulo definido entre os eixos dos dois enrolamentos ($\rho_d - \rho_q$).

Assim, tem-se

$$L_d = L_q = \text{cte} = L_a$$

$$M_{dq} = L_a \cos(\rho_d - \rho_q) = 0$$

- b) Ambos os circuitos são circuitos de comutação. Aplicando as equações 4.1 e as considerações deitas na secção anterior com um ângulo de transformação $\rho = -\theta$, tem-se:

$$u_d = r_a i_d + \frac{d\psi_d}{dt} + \omega_m \psi_q$$

$$u_q = r_a i_q + \frac{d\psi_q}{dt} - \omega_m \psi_d$$

Estando as escovas colocadas em quadratura, a relação entre os fluxos e as correntes será:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

Que introduzindo nas equações fundamentais, tem-se:

$$u_d = r_a i_d + L_a \frac{di_d}{dt} + \omega_m L_a i_q \quad \text{e} \quad u_d = -R_L i_d$$

$$u_q = r_a i_q + L_a \frac{di_q}{dt} - \omega_m L_a i_d$$

- c) O binário será dado por:

$$M_{em} = -\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r = -\psi_d i_q + \psi_q i_d = -L_a i_d i_q + L_a i_q i_d = 0$$

Destas equações pode concluir-se que o binário será sempre nulo. Este resultado deve-se ao facto de não existir interacção entre o estator e o rotor. Note-se que não existem enrolamentos no estator e o sistema não exhibe saliência magnética.

- d) A equação do equilíbrio mecânico será:

$$M_{em} = 0 \quad J \frac{d\omega_m}{dt} = 0 - M_c$$

Sendo o binário de carga nulo a velocidade é constante.

Para se obter o modelo de estado deve-se acrescentar as equações do equilíbrio eléctrico. Ou seja:

$$0 = (r_a + R_L) i_d + L_a \frac{di_d}{dt} + \omega_m L_a i_q$$

$$u_q = r_a i_q + L_a \frac{di_q}{dt} - \omega_m L_a i_d$$

e) Em regime permanente as derivadas em ordem ao tempo são nulas. Assim:

$$\omega_m = \text{cte}$$

$$0 = (r_a + R_L) I_d + \omega_m L_a I_q$$

$$U_q = r_a I_q - \omega_m L_a I_d$$

Resolvendo o sistema obtém-se:

$$I_d = - \frac{\omega_m L_a}{r_a (r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2} U_q$$

$$I_q = \frac{r_a + R_L}{r_a (r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2} U_q$$

f) Para esta alínea fazemos $R_L \gg r_a$ ou seja $r_a = 0$ tem-se:

$$I_d = - \frac{\omega_m L_a}{\omega_m^2 L_a^2} U_q = - \frac{U_q}{\omega_m L_a}$$

$$I_q = \frac{R_L}{\omega_m^2 L_a^2} U_q = - \frac{R_L I_d}{\omega_m L_a}$$

Note-se que a corrente I_d não depende da resistência R_L . Esta corrente é proporcional à tensão no eixo em quadratura U_q e inversamente proporcional à velocidade de rotação. Assim, a afirmação de que esta máquina se comporta como uma fonte de corrente é válida quando se puder desprezar as resistências próprias dos enrolamentos da máquina.

g. Curto-circuito

Se $R_L=0$, a corrente na carga i_d mantém-se constante. A corrente no eixo q tende para zero. Assim, o curto-circuito na carga não traz problemas de sobre-intensidades na máquina.

Circuito aberto

Se $R_L \rightarrow \infty$ em vez de $i_d = \text{cte}$ temos $i_d = 0$. A tensão U_d tende para $(\omega_m L_a U_q)/r_a$ que pode tomar um valor elevado. Por sua vez tem-se também $I_q = U_q/r_a$. Assim, o circuito aberto no eixo d vai

provocar sobrecarga de corrente no eixo q e uma sobre-tensão no eixo d.

h) A potência entregue pela fonte de tensão U_q será:

$$P_q = U_q I_q = \frac{r_a + R_L}{r_a(r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2} U_q^2$$

A potência entregue à carga R_L será:

$$P_d = R_L I_d^2 = \frac{R_L \omega_m^2 L_a^2}{(r_a(r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2)^2} U_q^2$$

A expressão de P_q pode pôr-se na forma:

$$\begin{aligned} P_q &= \frac{(r_a + R_L) [r_a(r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2]}{(r_a(r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2)^2} U_q^2 \\ &= \frac{(r_a + R_L)^2 r_a + \omega_m^2 L_a^2 (r_a + R_L)}{(r_a(r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2)^2} U_q^2 = r_a I_q^2 - \omega_m L_a I_q I_d \end{aligned}$$

A expressão de P_d pode pôr-se na forma:

$$P_d = -\omega_m L_a I_d I_q - r_a I_d^2$$

Assim tem-se:

Da potência entregue pelo eixo q parte são perdas no circuito $r_a I_q^2$ e a restante é transmitida ao outro eixo. Desta potência $(-\omega_m L_a I_q I_d)$ parte é perdida nos circuitos, $r_a I_d^2$ e a restante é entregue à carga.

Exemplo 4.2 "Modelização do Metadínamo"

O Metadínamo simples é constituído por um enrolamento de excitação colocado no estator e por um enrolamento do induzido. Sobre o colector do induzido encontram-se dois pares de escovas colocados como se mostra na figura 4.5. Para facilitar os cálculos, considera-se que o circuito magnético é linear, que o entreferro é constante e que os enrolamentos são sinusoidalmente distribuídos.

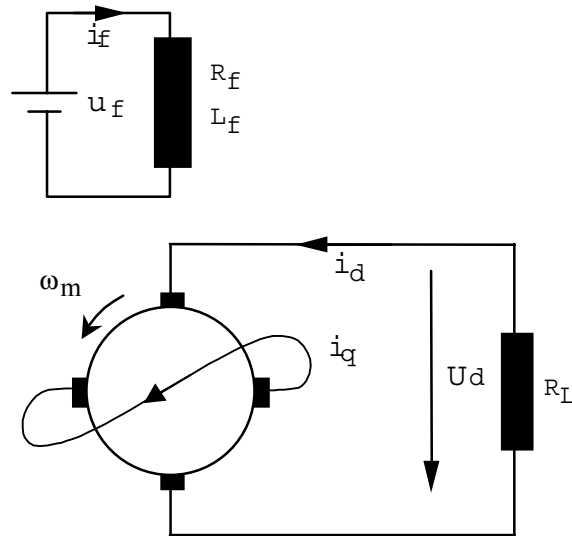


Fig. 4.5

- Escrever a matriz dos coeficientes de indução correspondentes aos circuitos da máquina.
- Determinar a expressão do binário.
- Escrever equações eléctricas em regime permanente.
- Relacionar as correntes nos circuitos d, q e f.
- Estabelecer um diagrama de potências da máquina.

Resolução:

a) Para este caso, as considerações do exemplo 4.1, alínea a) também são válidas. Assim, no referencial da figura e com as convenções indicadas, tem-se:

$$L_d = L_q = L_a = \text{cte}$$

$$L_f = \text{cte}$$

$$M_{dq} = M_{qd} = 0$$

$$M_{df} = M$$

$$M_{qf} = 0$$

Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & 0 & M \\ 0 & L_a & 0 \\ M & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix}$$

b) A expressão do binário pode ser obtida a partir de:

$$M_{em} = -\vec{\psi}_r \times \vec{i}_r = -\psi_d i_q + \psi_q i_d = -(L_a i_d + M i_f) i_q + L_a i_q i_d = -M i_f i_q$$

c) Com as escovas nas suas posições normais, tem-se em regime transitório:

$$u_d = r_a i_d + L_a \frac{di_d}{dt} + M \frac{di_f}{dt} + \omega_m L_a i_q$$

$$u_q = r_a i_q + L_a \frac{di_q}{dt} - \omega_m (L_a i_d + M i_f)$$

$$u_f = r_f i_f + M \frac{di_d}{dt} + L_f \frac{di_f}{dt}$$

Em regime permanente as derivadas em ordem ao tempo são nulas. Entrando com a característica da carga, tira-se:

$$0 = (r_a + R_L) I_d + \omega_m L_a I_q$$

$$0 = r_a I_q - \omega_m (L_a I_d + M I_f)$$

$$U_f = r_f I_f$$

d) A resolução do sistema de equações dá origem a:
 $I_f = U_f / R_f = \text{cte}$ $I_f = \text{cte}$

$$I_d = - \frac{\omega_m^2 M L_a}{r_a (r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2} I_f$$

$$I_q = \frac{(r_a + R_L) \omega_m M}{r_a (r_a + R_L) + \omega_m^2 L_a^2} I_f$$

Se se considerar nula a resistência do induzido,

$$0 = R_L I_d + \omega_m L_a I_q \quad I_q = - \frac{R_L I_d}{\omega_m L_a}$$

$$0 = L_a I_d + M I_f \quad I_d = - \frac{M}{L_a} I_f$$

Note-se que a corrente I_d não depende da carga. Por sua vez, a corrente I_q é tanto maior quanto maior for a resistência de carga.

$$e) P_f = r_f I_f^2$$

Considerando nula a resistência do induzido,

$$P_d = R_L I_d^2 = R_L \left(\frac{M}{L_a} I_f \right)^2$$

$$P_q = 0$$

A potência mecânica será $P_m = M_{em} \omega_m = - M i_q i_f \omega_m$
 ou

$$P_m = - \frac{M R_L I_d I_f}{L_a} = R_L I_d^2$$

Assim, aparte as perdas, a potência mecânica é transformada em potência eléctrica e entregue à carga.

4.2. Modelização da geratriz de rectificação

A figura 4.6 apresenta o esquema da geratriz de rectificação. Este sistema é constituído por uma máquina síncrona que roda à velocidade ω_m , associada a uma ponte a díodos. Devido ao funcionamento do rectificador, este sistema só poderá funcionar como gerador.

A geratriz de rectificação encontra algumas aplicações industriais em situações onde se deseje uma grande impedância de curto-circuito, como por exemplo, em dínamos de automóvel.

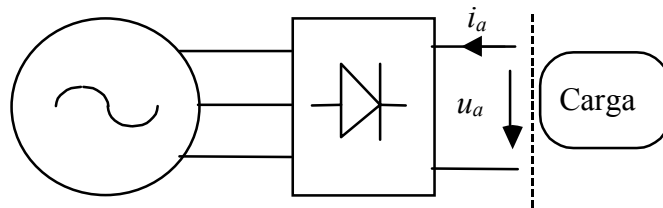


Fig. 4.6. Esquema da geratriz de rectificação

O indutor é constituído por uma bobina que roda à velocidade ω_m . Constitui um circuito do tipo filiforme. A modelização do conjunto “enrolamentos do estator, rectificador” pode ser feita através da teoria da transformação de Park. Neste caso, em regime permanente, a velocidade do referencial deverá ser igual à velocidade do campo girante. Pode escrever-se imediatamente:

$$\begin{aligned} u_d &= r_a i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega \psi_q \\ u_q &= r_a i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega \psi_d \\ u_f &= r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Onde ω é a velocidade de rotação da corrente equivalente que cria a mesma onda de F.m.m. Para simplificar a notação vamos admitir que a máquina tem apenas um par de pólos.

A relação entre os fluxos e as correntes será:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & 0 & M \\ 0 & L_a & 0 \\ M & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

O rectificador a díodos impõe uma segunda restrição: que as tensões e as correntes alternadas estejam em fase. Esta restrição é válida se se puder desprezar o período de condução simultânea que existe entre dois díodos durante a comutação. Caso se considere também o recobrimento, existirá um ângulo de defasagem que dependerá do valor da corrente.

A hipótese de considerar apenas a primeira harmónica de corrente no induzido e desprezar os efeitos da condução simultânea é equivalente a considerar que:

- existe um número infinito de fases no induzido
- em todos os instantes apenas uma das fases se encontra em condução
- a comutação não ocorre em períodos discretos no tempo, mas continuamente.

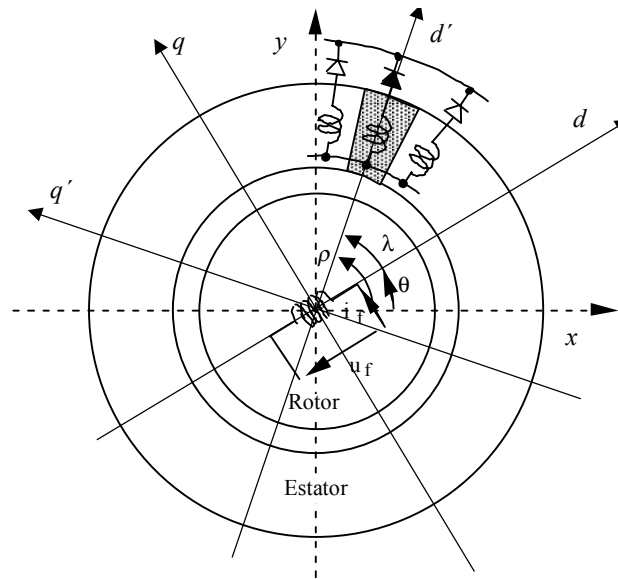


Fig. 4.7 Geratriz de rectificação

Na figura 4.7 representa-se este sistema com um número de fases elevado para o caso da rectificação simples. Sabe-se que toda a rectificação em ponte tem como equivalente uma rectificação simples.

A posição do enrolamento do indutor é representada pela coordenada θ e $d\theta/dt = \omega_m$.

A zona espacial no interior da qual se encontra a fase em condução está sublinhada e é representada pela coordenada média $\rho = \theta + \lambda$.

Como, em regime permanente, o referencial roda à velocidade do rotor, o ângulo ρ varia também linearmente no tempo. Para que no modelo a obter, as variáveis de estado sejam constantes em regime permanente, em vez de se utilizar o ângulo ρ vamos utilizar o ângulo λ . Este ângulo está relacionado com a posição das duas forças magnetomotrices e em regime permanente é constante no tempo.

As equações 4.11 e 4.12 representam a geratriz de rectificação no referencial do rotor da máquina síncrona. A estas equações deverá introduzir-se a condição: tensão e corrente do induzido em fase. Esta condição pode ser introduzida matematicamente utilizando coordenadas polares e rodando o referencial de modo que o eixo d fique alinhado com a corrente do induzido (referencial d' - q' da figura 4.7). Assim:

$$u_d = u_a \quad i_d = i_a \quad u_q = 0 \quad i_q = 0 \quad \omega = \omega_m + \frac{d\lambda}{dt} \quad (4.13)$$

$$\psi_d = L_a i_a + M i_f \cos \lambda \quad (4.14)$$

$$\psi_f = L_f i_f + M i_a \cos \lambda \quad (4.15)$$

$$\psi_q = -M i_f \sin \lambda \quad (4.16)$$

Modelo da Geratriz de Rectificação

Substituindo as equações 4.13 a 4.14 no modelo 4.11 obtém-se o modelo da geratriz de rectificação em coordenadas polares.

Em notação matricial pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} u_f - r_f i_f \\ u_a - r_a i_a - \omega_m M i_f \sin \lambda \\ -\omega_m L_a i_a - \omega_m M i_f \cos \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M \cos \lambda & -M \sin \lambda \\ M \cos \lambda & L_a & 0 \\ -M \sin \lambda & 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_f}{dt} \\ \frac{di_a}{dt} \\ i_a \frac{d\lambda}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Por sua vez, o binário escreve-se:

$$M_{em} = -M i_f i_a \sin \lambda \quad (4.18)$$

Às equações 4.17 deve-se associar as seguintes desigualdades:

$$i_a < 0$$

$$u_a > 0$$
(4.19)

As equações 4.17 e 4.18, conjuntamente com as desigualdades 4.19 são as equações eléctricas procuradas.

Estudo do regime permanente

Em regime permanente, como as variáveis de estado são constantes no tempo, as suas derivadas são nulas. Assim, tem-se:

$$u_f = r_f i_f$$

$$u_a = \omega_m M i_f \sin \lambda + r_a i_a$$

$$0 = M i_f \cos \lambda + L_a i_a$$
(4.20)

Da terceira equação que determina a posição da corrente, tira-se:

$$\cos \lambda = - \frac{L_a i_a}{M i_f}$$
(4.21)

Em vazio $i_a = 0$, e como $u_a > 0$, tem-se $\lambda = \pi/2$. À medida que a corrente i_a sobe (em valores negativos) $\cos \lambda$ tende para 1 o que implica que $\lambda \rightarrow 0$. Isto significa que um aumento de corrente de carga tende a alinhar a corrente do induzido com o enrolamento do indutor. O fluxo criado pelo circuito do induzido tende a opor-se ao fluxo criado pela bobina do indutor.

Se se desprezar a resistência do induzido, tem-se

$$\sin^2 \lambda = 1 - \left(\frac{L_a i_a}{M i_f} \right)^2$$
(4.22)

$$u_a^2 = (\omega_m M i_f)^2 \left[1 - \left(\frac{L_a i_a}{M i_f} \right)^2 \right]$$
(4.23)

$$u_a^2 = (\omega_m M i_f)^2 - (\omega_m L_a i_a)^2$$
(4.24)

Definindo os valores da tensão em vazio u_{ao} e da corrente de curto-circuito i_{cc} :

$$u_{ao} = \omega_m M i_f$$
(4.25)

$$i_{cc} = \frac{u_{ao}}{\omega_m L_a} \quad (4.26)$$

A equação 4.24 toma a forma

$$\frac{u_a^2}{u_{ao}^2} + \frac{i_a^2}{i_{cc}^2} = 1 \quad (4.27)$$

Esta expressão é a equação da elipse que se encontra representada na figura 4.8. Nesta figura, retirada de [2] apresentam-se também resultados experimentais de uma máquina com as seguintes características:

$S_N=5$ kVA, 380 V, 4 pólos, velocidade de 1650 rpm

Os parâmetros medidos entre fase e neutro do induzido são:

$r_a=0.48 \Omega$ $L_a=0.088$ (H) $M=0.155$ (H)

e entre dois bornes do induzido:

$r_a=0.96 \Omega$ $L_a=0.235$ (H) $M=0.270$ (H)

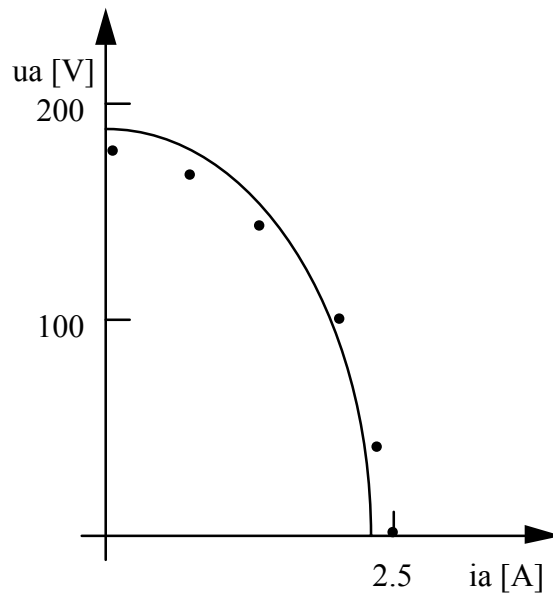


Fig. 4.8. Rectificação em ponte (os pontos representam resultados experimentais)

O primeiro grupo de parâmetros deverá ser utilizado no caso da rectificação simples, cujos resultados se encontra na figura 4.9.

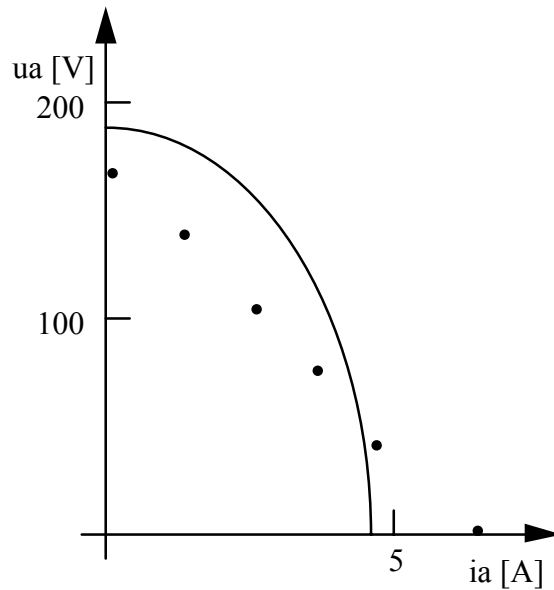


Fig. 4.9. Rectificação simples (os pontos representam resultados experimentais)

Constata-se neste caso uma grande discordância com os resultados experimentais. Esta discordância provem de dois factores. Em vazio o modelo pressupõe um número infinito de fases e fornece a tensão rectificada de pico e não o valor médio no intervalo eléctrico $2\pi/3$. Este erro tende para zero quando o número de fases tender para infinito.

O erro da corrente de curto-circuito tem uma causa diferente. Tem a ver com o fenómeno do recobrimento ou condução simultânea dos díodos. Este efeito foi ignorado no modelo que pressupõe uma comutação descontínua ideal onde apenas uma fase conduz de cada vez. Este erro é independente do número de fases.

Embora inadequado à rectificação simples, o modelo adapta-se melhor à rectificação em ponte. Os parâmetros a utilizar são os medidos entre bornes, pois neste tipo de rectificação são duas fases em série que conduzem simultaneamente. Os resultados encontram-se na figura 4.8. Neste caso os erros são menos importantes, mas são devidos às mesmas causas.

Exemplo 4.3 - Sistema de excitação “Brushless”

Um sistema de excitação de uma máquina síncrona é constituído por um enrolamento monofásico colocado no estator e por um sistema de enrolamentos colocados no rotor com 35 fases. Entre estes enrolamentos e o circuito de excitação da máquina síncrona encontra-se uma ponte de rectificação a díodos que roda solidária com o rotor.

- Qual o modelo matemático deste sistema?
- Como controlar a corrente de excitação da máquina síncrona?

Resolução

a) A figura 4.10 representa o sistema a modelizar. A turbina tem como função fornecer potência mecânica ao conjunto “Máquina Síncrona - Sistema de excitação”.

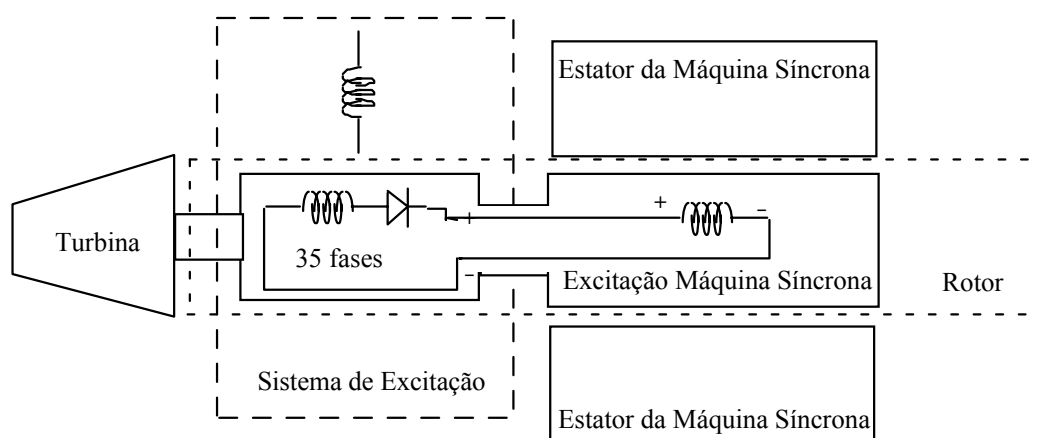


Fig. 4.10 Corte esquemático longitudinal

Vamos admitir que a potência em jogo no sistema de excitação é muito menor que a potência entregue à Máquina Síncrona. Como a Máquina Síncrona se encontra ligada à rede, podemos considerar a velocidade de rotação constante. Vamos admitir que o sistema de rectificação tem 35 díodos de cátodo comum e que o retorno se faz pelo neutro. O indutor encontra-se no estator e é alimentado por uma fonte de tensão contínua.

Dinâmica do Sistema electromecânico

A rede eléctrica mantém uma velocidade constante no rotor, onde estão os enrolamentos ligados aos díodos que constituem a ponte de rectificação simples. O enrolamento indutor é percorrido por corrente contínua que vai produzir um fluxo estático no espaço e induzir uma força electromotriz nos enrolamentos do rotor em movimento.

Numa rectificação simples apenas conduz um díodo de cada vez que é o que está ligado à fase que apresenta aos seus terminais a maior força electromotriz (desprezam-se os fenómenos de condução simultânea numa primeira aproximação).

Durante o regime transitório pode-se considerar que a posição da corrente varia no tempo. Attingido o regime permanente cada díodo conduzirá na sua vez e a corrente terá sempre a mesma posição.

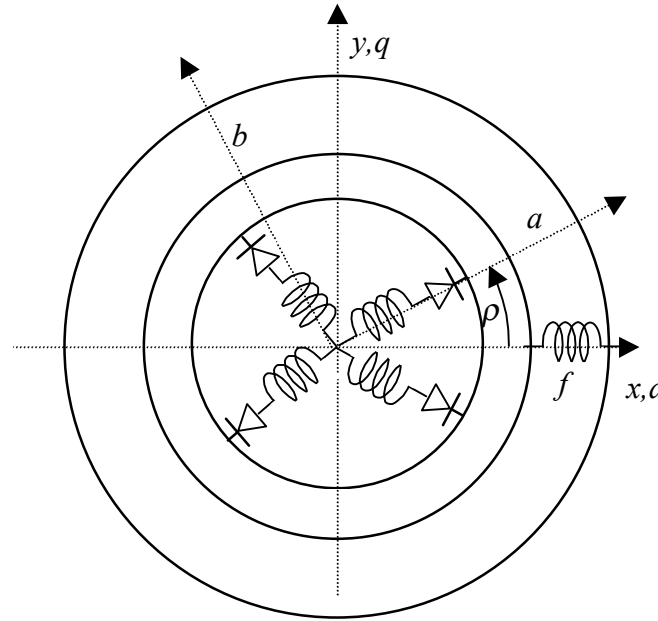


Fig. 4.11 Representação do sistema idealizado com rectificação simples.

Para a modelização deste sistema vamos considerar a convenção motor.

Equações eléctricas

O circuito indutor (encontra-se no referencial do estator) é do tipo filiforme. O circuito induzido que se encontra no rotor pode ser modelizado por um par de circuitos equivalentes estacionários com o estator. As suas equações são obtidas através de uma transformação com ângulo igual a $\rho = -\theta$. Assim:

$$\begin{aligned} u_d &= r_a i_d + \frac{d\psi_d}{dt} + \omega \psi_q \\ u_q &= r_a i_q + \frac{d\psi_q}{dt} - \omega \psi_d \\ u_f &= r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \end{aligned}$$

Admitindo uma distribuição sinusoidal de força magnetomotriz, tem-se na forma matricial a seguinte relação entre fluxos e correntes:

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M \cos \rho \\ M \cos \rho & L_a \\ -M \sin \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix}$$

A equação do circuito indutor final, isto é depois de derivarmos o fluxo indutor ψ_f em ordem ao tempo é:

$$u_f = r_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M \cos \rho \frac{di_a}{dt} - M \sin \rho i_a \frac{d\rho}{dt}$$

Para o circuito induzido temos

$$u_a = r_a i_a + M \cos \rho \frac{di_f}{dt} - M i_f \sin \rho \frac{d\rho}{dt} + L_a \frac{di_a}{dt} + \dot{\rho} M i_f \sin \rho - \dot{\theta} M i_f \sin \rho$$

Simplificando a expressão e substituindo $\dot{\theta}$ por ω que representa a velocidade do rotor, a expressão final vem:

$$u_a = r_a i_a + M \cos \rho \frac{di_f}{dt} + L_a \frac{di_a}{dt} - \omega M i_f \sin \rho$$

Com as desigualdades

$$i_a < 0 \quad u_a > 0$$

Como já temos as 3 equações que descrevem o modelo dinâmico da excitação vamos escrevê-lo na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} u_f - r_f i_f \\ u_a - r_a i_a - \omega M i_f \sin \rho \\ \omega L_a i_a + \omega M i_f \cos \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M \cos \rho & -M \sin \rho \\ M \cos \rho & L_a & 0 \\ -M \sin \rho & 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_f}{dt} \\ \frac{di_a}{dt} \\ i_a \frac{d\rho}{dt} \end{bmatrix}$$

Estas equações são semelhantes às equações do modelo da geratriz de rectificação se se substituir ω por $(-\omega)$ e λ por ρ .

Regime permanente

Como o modelo é semelhante ao da geratriz de rectificação, o regime permanente será determinado do mesmo modo. Obter-se-á também uma elipse como característica exterior.

b) Pela expressão

$$\cos \rho = - \frac{L_a}{M i_f} i_a, \quad i_{cc} = \frac{\omega M}{\omega L_a} i_f$$

verifica-se que é possível controlar a corrente de excitação da máquina síncrona i_a variando a corrente no estator i_f .

Se se pretender, por exemplo, aumentar i_a em valor absoluto, aumentamos também i_f . Neste sistema não se pode como habitualmente controlar a corrente de excitação i_a variando a velocidade rotórica ω porque a máquina é uma Máquina Síncrona.

Este sistema conhecido por sistema "Brushless" tem a vantagem de não ter escovas e consequente desgaste destas como acontece por exemplo no sistema de controlo de velocidade WARD-LEONARD.

Exercícios de Revisão:**I**

Considere uma máquina pólos lisos constituída por:

- Um enrolamento monofásico sinusoidalmente distribuído e colocado no estator .
- Um enrolamento do induzido com colectores colocado no rotor semelhante ao de uma máquina de corrente contínua. Sob o colector assentam dois pares de escovas. Estes dois pares de escovas encontram-se respectivamente alinhados e em quadratura com o enrolamento do estator. Estes dois enrolamentos encontram-se em curto-circuito.

Sabe-se que o coeficiente de auto-indução do estator é $0.1H$. O coeficiente de auto-indução do enrolamento em quadratura é $0.05H$. O factor de ligação magnética entre os dois enrolamentos que se encontram alinhados é de 0.95 .

- a) Determine a matriz dos coeficientes de indução desta máquina.
- b) Determine o modelo matemático desta máquina escrevendo as suas equações eléctricas e a equação do binário.
- c) Escreva as equações da alínea b) em função das variáveis de estado (correntes nos enrolamentos).
- d) A máquina encontra-se alimentada com uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz igual a 230 V e frequência 50 Hz .
 - d.1) Obtenha um modelo matemático apropriado para o estudo da máquina em regime permanente.
 - d.2) Diga como obteria as características eléctricas e mecânicas desta máquina.

II

Considere um motor de uma máquina ferramenta de excitação em série com possibilidade de regulação da posição das escovas através de um mecanismo auxiliar. O rotor desta máquina é liso, mas o estator apresenta pólos salientes. São conhecidos os seguintes dados da máquina:

$$P_N = 400\text{ W} \quad , \quad 1.9\text{ A} \quad , \quad r_a = 16.7\Omega \quad , \quad r_a + r_f = 28.7\Omega \quad , \quad L_f = 0.056\text{ H}$$

Sabe-se que, com as escovas na posição da linha neutra geométrica, o coeficiente de auto-indução do induzido é $0.01H$. Quando as escovas se encontrarem numa posição tal que os campos criados pelos dois enrolamentos se encontrem alinhados, verifica-se que o coeficiente de auto-indução do induzido é $0.04H$ e que o coeficiente de indução mútua é $0.045H$. A forma do entreferro e a distribuição de condutores ao longo da periferia é tal que se pode admitir que os coeficientes de indução são funções

sinusoidais da posição das escovas. O momento de inércia do motor é $J_m=0.01\text{kgm}^2$. Esta máquina encontra-se ligada a um redutor de velocidade cujas perdas mecânicas são proporcionais à velocidade. Não se sabe o valor do correspondente binário de perdas, mas sabe-se que em vazio, com as escovas colocadas na posição de linha neutra, a máquina absorve 0.5A.

Responda às seguintes questões justificando os cálculos e as aproximações que efectuar.

A - Modelação da máquina. Determine:

1. A matriz dos coeficientes de indução.
2. As equações gerais correspondentes a cada enrolamento.
3. As equações eléctricas correspondentes ao modelo matemático da máquina.
4. A equação do binário em função das correntes.
5. O ângulo óptimo de decalagem das escovas. O que é que se pretende com a decalagem das escovas? Será que este processo é sempre eficaz? E neste caso particular?

B - Estudo da máquina alimentada em corrente contínua. (U=230V)

Considere um ângulo de decalagem de 15° no sentido contrário ao sentido de rotação. Determine:

1. A característica "Binário-Corrente".
2. A característica electromecânica. Qual a velocidade e o binário útil para a potência nominal?
3. Determine o rendimento em função da corrente ou do binário.

C - Estudo da máquina alimentada em corrente alternada

(U=230V, $f=50\text{Hz}$)

Com um ângulo de decalagem de 15° no sentido contrário ao sentido de rotação, determine:

1. O modelo da máquina em regime permanente.
2. Como variam as seguintes grandezas ao longo do tempo: corrente, binário, velocidade, e força electromotriz.
3. Será possível utilizar diagramas vectoriais para o estudo desta máquina em regime permanente? Em caso afirmativo faça um diagrama vectorial para uma corrente igual à corrente nominal. Considere que a velocidade é igual à velocidade nominal.

4. Determine o factor de potência, a velocidade e o binário para:
Carga nula, meia carga e carga nominal

D - Regulação da máquina.

1. Como pode inverter o sentido de marcha desta máquina?
2. Diga como pode variar a velocidade desta máquina.
3. Será que é possível regular a velocidade actuando na posição das escovas? Em caso afirmativo diga quais as vantagens e inconvenientes de tal regulação.

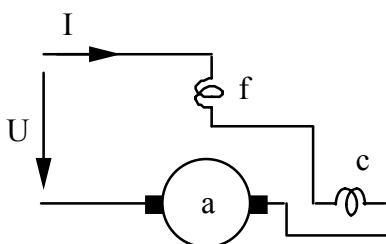
E - Estudo como gerador

Esta máquina foi dimensionada para funcionar como motor. Será possível o funcionamento também como gerador? Em caso afirmativo diga quais as ligações que executaria. Qual a influência da saturação?

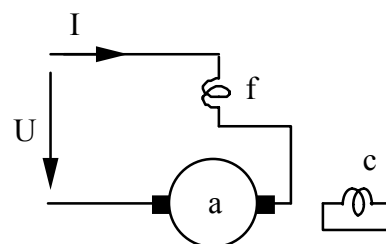
F - Máquina com circuito de compensação

Frequentemente são utilizados motores que, além dos dois circuitos atrás referidos, têm também um enrolamento de compensação. Este enrolamento encontra-se no estator alinhado com o enrolamento do induzido. São possíveis duas soluções:

- 1 - Compensação série, em que o enrolamento de compensação é percorrido pela corrente do motor.
- 2 - Compensação em curto-circuito, em que o enrolamento de compensação se encontra em curto-circuito.



Compensação série



Compensação em curto-circuito

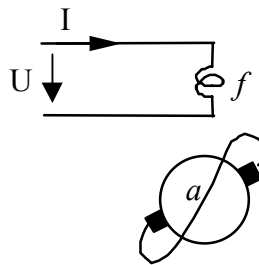
1. Determine os modelos matemáticos correspondentes a estas duas situações para uma máquina com os enrolamentos de excitação e induzido semelhantes aos da máquina anterior. Considere um enrolamento de compensação com coeficientes de indução genéricos.
2. Qual o ângulo de decalagem das escovas ideal? Justifique.

3. Dimensione o enrolamento de compensação nos dois casos referidos sabendo que a máquina será alimentada a uma frequência de 50 Hz.
4. Determine os novos valores de factor de potência, de binário e de velocidade para as situações:

Carga nula, meia carga, carga nominal

III

Considere a máquina de repulsão representada na figura. Determine um modelo matemático que a represente em regime transitório e em regime permanente.



Arbitre valores para os parâmetros e trace as suas características.

Bibliografia:

- [1] - Jones “ The Unified Theory of Electrical Machines” Plenum Press 1967
- [2] - Garrido, M.S. “Etude théorique et experimental de la generatrice à redresseur. I - Etude du regime permanent”, Revue E, Vol. VII, n.3, pp.61-70, 1972.
- [3] - Pierrat, L. ; Garrido, M. S.; Labrique, F. ; Mauhin, B. “Modélization de la commutation dans une génératrice à redresseur à grand nombre de phases”, 83 AMSE Summer Conference, Nice, September 1983

Capítulo 5

Regimes transitórios das Máquinas de Corrente Contínua

5.1 Introdução

As máquinas de corrente contínua apresentam-se como elementos de conversão electromecânica de grande versatilidade. Utilizando as várias combinações de enrolamentos de campo série, derivação e independente, estas máquinas apresentam uma ampla variedade de características tensão-corrente ou velocidade-binário tanto em regime dinâmico como em regime permanente. Devido à facilidade de controlo, os motores de corrente contínua associados a dispositivos de electrónica de potência são frequentemente usados em aplicações que requerem uma ampla faixa de velocidades, ou um controlo preciso, etc.

Frequentemente, as características das máquinas são modificadas pela introdução de circuitos de realimentação. O objectivo deste capítulo é estudar a máquina de corrente contínua como servomecanismo onde as suas características dinâmicas constituem o principal aspecto a considerar.

Será dada mais importância ao funcionamento desta máquina como motor, pois é como motor que ela tem mantido o seu interesse industrial, dado que, como gerador ela tem vindo a ser substituída por outros sistemas.

5.2 A máquina de corrente contínua ideal

Devido à complexidade que o estudo completo da máquina de corrente contínua apresenta, serão feitas algumas hipóteses simplificativas. Estas hipóteses serão:

1 - As escovas são estreitas e estão colocadas na linha neutra. A comutação é linear. O eixo da onda de f.m.m. do induzido é fixo no espaço e está em quadratura com o do campo.

2 - É desprezada a reacção magnética do induzido. Admitimos que a máquina tem circuito de compensação e que essa compensação é ideal.

3 - Os efeitos da saturação magnética são desprezados. A sobreposição de campos magnéticos pode ser realizada e as indutâncias podem ser consideradas independentes das correntes.

Se se admitir estas hipóteses temos o conceito de “Máquina de corrente contínua ideal”.

Será utilizada a convenção motor. Na fig. 5.1 apresenta-se o esquema equivalente para esta máquina onde se indicam os sentidos considerados positivos para as várias grandezas em jogo.

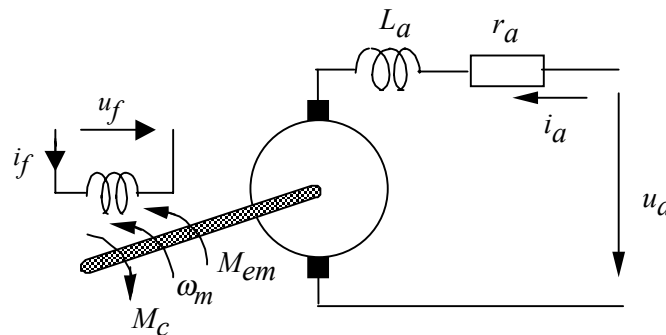


Fig. 5.1 Representação esquemática da máquina de corrente contínua

r_f - Resistência do enrolamento de excitação

L_f - Coeficiente de auto-indução do circuito de campo

i_f - Corrente no circuito de campo

u_f - Tensão aplicada ao circuito de campo

r_a - Resistência do circuito do induzido

L_a - Coeficiente de auto-indução do circuito do induzido

i_a - Corrente no circuito do induzido

u_a - Tensão aplicada ao circuito do induzido

M_{em} - Binário electromagnético

ω_m - Velocidade angular da máquina

M_c - Binário de carga

J - Momento de inércia do conjunto motor-carga

Modelo dinâmico da máquina de corrente contínua

Admitindo as hipóteses anteriores, o modelo matemático para a máquina de corrente contínua traduz-se pelas equações:

$$\begin{aligned} u_f &= r_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \\ u_a &= r_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + M_o \omega_m i_f \\ M_{em} &= M_o i_a i_f \end{aligned} \quad (5.1)$$

O coeficiente de indução L_a inclui o efeito de quaisquer enrolamentos em série com o induzido tais como interpólos e enrolamentos compensadores. A equação do movimento, na convenção motor, escreve-se:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_o i_a i_f - M_c \quad (5.2)$$

Em termos de modelo de estado, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_a \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f & 0 & 0 \\ 0 & r_a & M_o i_f \\ 0 & M_o i_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f & 0 & 0 \\ 0 & L_a & 0 \\ 0 & 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p i_f \\ p i_a \\ p \omega_m \end{bmatrix} \quad p = \frac{d}{dt} \quad (5.3)$$

Que poderá ser escrita na forma condensada

$$[U] = [R] [X] + [L] [pX] \quad (5.4)$$

Existe energia magnética armazenada nos circuitos de campo e induzido e energia cinética armazenada nas massas rotativas. Consequentemente, as correntes de campo e induzido e a velocidade são variáveis de estado.

O sistema (5.3) é um conjunto de 3 equações diferenciais não lineares de primeira ordem devido à presença na matriz $[R]$ da variável de estado i_f . Os coeficientes desta matriz não são constantes, mas variarão à medida que a corrente de campo variar.

Estas equações, juntamente com as equações de Kirchhoff para os circuitos que estão ligados ao circuito de campo e ao circuito do induzido, bem como as características “binário-velocidade” do sistema mecânico ligado ao eixo, determinam o comportamento do sistema.

Funções de transferência. Resposta no tempo.

A maior dificuldade na análise das máquinas de corrente contínua é a saturação. Contudo a análise linear do sistema é útil por duas razões. Essa simplificação dá-nos uma ideia do modo como os outros factores (que não a saturação) interferem no sistema. Além disso, a análise de sistemas que envolvem combinações complexas de máquinas eléctricas com outros equipamentos torna-se possível. Não fazendo essas simplificações a análise seria praticamente impossível sem recorrer a métodos computacionais.

O sistema de equações (5.3) é linear se admitimos excitação constante $i_f = \text{cte}$. Este caso verifica-se na máquina de excitação independente a fluxo de excitação constante.

Seguidamente ir-se-á analisar o transitório de arranque da máquina de corrente contínua. Na parte a) esse transitório diz respeito à máquina de excitação independente onde se admite que i_f é constante. Analisar-se-á também o transitório resultante da aplicação de binários de carga ao veio. A parte b) diz respeito ao transitório do motor série. A análise destes casos permite-nos obter uma ideia de como as grandezas evoluem no tempo e além disso, permite-nos com o conhecimento adquirido nesta análise, saber como se faria a análise doutros sistemas diferentes e porventura mais complexos.

5.3 Motor de corrente contínua de excitação independente

Os motores de corrente contínua são frequentemente utilizados em aplicações que requerem um controlo preciso de velocidade e de binário numa faixa relativamente ampla. Um dos modos comuns de controlo é o uso de um motor de excitação

independente com a excitação do campo constante. A velocidade é controlada pela variação da tensão no induzido. A análise deste sistema envolve os transitórios eléctricos do circuito do induzido e a dinâmica da carga mecânica movida pelo motor. Fica-se assim com duas variáveis de estado i_a e ω_m . A corrente i_f deixa de ser considerada variável de estado pois permanece constante ao longo de todo o transitório. Deve notar-se que à corrente i_f está associado um armazenamento de energia magnética. A energia magnética armazenada no circuito de campo não é trocada com mais nenhum outro sistema: há desacoplamento do circuito do campo relativamente às outras variáveis de estado.

O modelo da máquina de excitação independente será:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & k_m \\ k_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

com $k_m = M_o i_f = \frac{e_{ao}}{\omega_{mo}} \quad k_m \text{ [Nm A}^{-1}\text{] ou [Vs rad}^{-1}\text{]}$

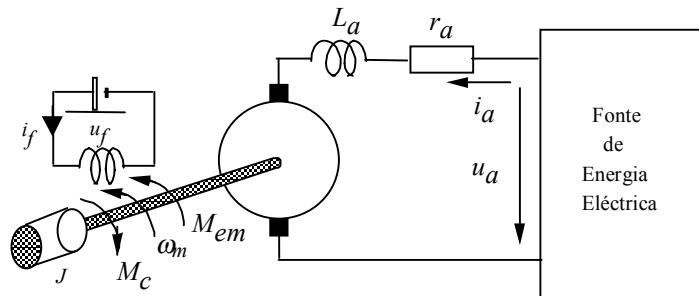


Fig. 5.2 Representação da máquina de excitação independente (Convenção motor).

Na fig. 5.2 representa-se um motor de excitação independente. A fonte de alimentação poderá ser um rectificador controlado, um gerador de corrente contínua ou outro sistema.

Para a resolução total do problema ter-se-á de saber como variam as funções u_a e M_c . A tensão u_a é por hipótese um escalão, o binário de carga M_c varia de situação para situação. Para se obter uma ideia do comportamento transitório da máquina de excitação independente, vamos admitir uma situação em que o binário de carga tem um factor independente da velocidade o qual representa o binário útil, e um factor proporcional à velocidade que representa o binário de atrito. Assim:

$$M_C = D \omega_m + M_u \quad (5.6)$$

D - Coeficiente de atrito $[N_m \text{ rad}_s^{-1}]$

Quando, em situações extremas, na equação 5.6 se fizer $D=0$ está-se a representar uma característica de carga com o binário independente da velocidade. Por outro lado, quando $M_u=0$, pode representar-se uma carga em que o binário é proporcional à velocidade.

Para se conhecer o sistema completamente, ter-se-á de estudar as suas várias funções de transferência, nomeadamente:

$$F_{1(s)} = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} \quad F_{2(s)} = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} \quad G_{1(s)} = \frac{\tilde{u}_m(s)}{M_u(s)} \quad G_{2(s)} = \frac{I_a(s)}{M_u(s)} \quad (5.7)$$

Para se obter as funções de transferência pretendidas pode desenvolver-se o diagrama de blocos, ou tirá-las do modelo de estado resolvendo o sistema de equações algébricas obtido da aplicação da transformação de Laplace ao sistema de equações diferenciais depois de introduzida a equação (5.6).

Assim:

$$\begin{bmatrix} U_a(s) \\ M_u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & k_m \\ k_m & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(s) \\ \Omega_m(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_a(s) \\ s\tilde{u}_m(s) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$U_a(s)$, $M_u(s)$, $I_a(s)$ e $\Omega_m(s)$ são as transformadas de Laplace de $u_a(t)$, $M_u(t)$, $i_a(t)$ e $\omega_m(t)$ respectivamente. As equações 5.8 podem tomar a forma:

$$\begin{bmatrix} U_a(s) \\ M_u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a + L_a s & k_m \\ k_m & -D - Js \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(s) \\ \tilde{u}_m(s) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Utilizando a regra de Kramer:

$$I_a(s) = \frac{\begin{vmatrix} U_a(s) & k_m \\ M_u(s) & -D - Js \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_a + L_a s & k_m \\ k_m & -D - Js \end{vmatrix}} = \frac{(D + Js)U_a(s) + k_m M_u(s)}{\Delta} \quad (5.10)$$

$$\Omega_m(s) = \frac{\begin{vmatrix} k_m & -D - Js \\ r_a + L_a s & U_a(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_a + L_a s & k_m \\ k_m & -D - Js \end{vmatrix}} = \frac{k_m U_a(s) - (r_a + L_a s)M_u(s)}{\Delta} \quad (5.11)$$

onde:

$$\Delta = (R_a + L_a s)(D + Js) + k_m^2 \quad (5.12)$$

concluí-se:

$$F_1 = \frac{\tilde{U}_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{\tilde{A}(s)} \quad F_2 = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{D + Js}{\Delta(s)} \quad (5.13a)$$

$$G_1 = \frac{\tilde{U}_m(s)}{M_u(s)} = -\frac{r_a + L_a s}{\tilde{A}(s)} \quad G_2 = \frac{I_a(s)}{M_u(s)} = \frac{K_m}{\tilde{A}(s)} \quad (5.13b)$$

Verifica-se que as funções F_1 e G_2 tem apenas dois pólos enquanto que as funções F_2 e G_1 têm 2 pólos e 1 zero. O comportamento das variáveis i_a e ω_m será diferente consoante se tenham variações nas duas funções de entrada U_a e M_u .

Estudo do polinómio característico. Determinação dos pólos do sistema.

A determinação dos pólos do sistema reveste-se de uma especial importância. Na verdade, o comportamento de um sistema depende da localização dos seus pólos e zeros. Os pólos são os zeros do polinómio característico. Tem-se:

$$s^2 + \frac{r_a J + L_a D}{L_a J} s + \frac{k_m^2 + r_a D}{L_a J} = 0 \quad (5.14)$$

Definem-se:

$$\tau_a = \frac{L_a}{r_a} \quad \text{Constante de tempo do induzido} \quad (5.15)$$

$$\tau_m = \frac{J r_a}{k_m^2} \quad \text{Constante de tempo inercial} \quad (5.16)$$

Que correspondem a situações extremas. A constante de tempo do induzido τ_a corresponde à consideração da hipótese de velocidade constante ou de inércia infinita. Neste situação a máquina pode ser representada por um sistema de primeira ordem com a constante de tempo τ_a . A constante de tempo inercial corresponde à situação em que se despreza o coeficiente de indução do induzido. Neste situação a corrente do induzido pode variar instantaneamente. O modelo da máquina reduz-se a um sistema de primeira ordem com a constante de tempo inercial τ_m . Utilizando estes novos parâmetros a equação 5.14 toma a forma:

$$s^2 + \left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{D}{J} \right) s + \frac{1}{\tau_a} \left(\frac{D}{J} + \frac{1}{\tau_m} \right) = 0 \quad (5.17)$$

Comparando com a forma normalizada $s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2$ conclui-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\tau_a} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{D}{J} \right)} \quad (5.18)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\tau_a} + \frac{D}{J}}{\sqrt{\frac{1}{\tau_a} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{D}{J} \right)}} \quad (5.19)$$

As raízes são dadas pela equação bem conhecida

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (5.20)$$

Se $\xi > 1$ a resposta é caracterizada por dois termos exponenciais negativos, se $\xi < 1$ tem-se uma sinusóide amortecida. A carga mecânica normalmente tem um efeito pequeno sobre ω_n e ξ embora esta afecte a velocidade do regime permanente. Se D/J for desprezado obtém-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\tau_a \tau_m}} \quad (5.21)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_a}} \quad (5.22)$$

Exemplo 5.1

São dadas as seguintes constantes para dois motores de corrente contínua. típicos e compensados.

Motor N°1

1 Cv, 500 rpm, 240 V

$r_a = 7.56 \, \Omega$

$L_a = 0.055 \, \text{H}$

$k_m = 4.23 \, \text{V.s/rad}$

$J = 0.068 \, \text{Kg m}^2$

Motor N° 2

100 Cv, 1750 rpm, 240 V

$r_a = 0.0144 \, \Omega$

$L_a = 0.0011 \, \text{H}$

$k_m = 1.27 \, \text{V.s/rad}$

$J = 1.82 \, \text{Kg m}^2$

Suponha-se que a característica binário-velocidade é uma recta passando pela origem e pelo ponto de binário nominal, e que o momento

de inércia da carga é igual ao momento de inércia do motor. O momento de inércia total será assim o dobro do momento de inércia indicado. Suponha-se também que em série com o induzido desta máquina se encontra uma bobina com valores de resistência e coeficiente de auto-indução iguais aos do induzido da máquina.

Determinar a frequência natural não amortecida ω_n e o amortecimento relativo ξ para cada motor.

Discutir o efeito da aproximação $\frac{D}{J} < \frac{1}{\tau_m}$.

Solução:

Motor N° 1

$$1 \text{ Cv} = 735 \text{ W}$$

$$500 \text{ rpm} = 52.3 \text{ rad/s}$$

$$M_N = \frac{735}{52.3} = 14.1 \text{ Nm}$$

$$D = \frac{M_N}{\omega_{mN}} = 0.269$$

$$J = 2(0.068) = 0.136 \text{ Kg m}^2$$

$$D/J = 1.98$$

$$\tau_a = \frac{0.11}{15.1} = 0.0073$$

$$1/\tau_a = 137$$

$$\tau_m = \frac{0.136 \times 15.1}{(4.23)^2} = 0.115$$

$$1/\tau_m = 8.7$$

Motor N° 2

$$100 \text{ Cv} = 73.5 \text{ kW}$$

$$1750 \text{ rpm} = 183 \text{ rad/s}$$

$$M_N = 402 \text{ N.m}$$

$$D = 2.20$$

$$J = 2(1.82) = 3.64 \text{ Kg m}^2$$

$$D/J = 0.60$$

$$\tau_a = 0.0764 \text{ s}$$

$$1/\tau_a = 13.1$$

$$\tau_m = 0.065$$

$$1/\tau_m = 15.4$$

Verifica-se que o efeito da carga D/J é pequeno especialmente no motor de 100cV. Este resultado é tanto mais importante pois está-se a considerar o pior caso em termos de D (o maior valor de D possível).

Obtém-se:

Motor N° 1

$$\omega_n = \sqrt{137 \times 8.7} = 38.3$$

$$\xi = 1.82$$

$$z_1 = -1.98$$

$$z_2 = -\frac{r_a}{L_a} = -137$$

Motor N° 2

$$\omega_n = 14.47 \text{ rad/s}$$

$$\xi = 0.47$$

$$z_1 = -0.61$$

$$z_2 = -13.1$$

$$s_1 = -11.48$$

$$s_1 = -6.85 + 12.74 j$$

$$s_2 = -127.96$$

$$s_2 = -6.85 - 12.74 j$$

Se se desprezar a constante de tempo do induzido, o sistema comporta-se como um sistema de 1ª ordem cuja constante de tempo é τ_m . É esta a razão porque se definiu τ_m e se lhe chamou constante de tempo inercial. Esta aproximação é válida apenas para o caso do motor Nª 1.

Em geral o coeficiente de indução do circuito do induzido pode ser desprezada para coeficientes de amortecimento $\xi > 1,5$ correspondendo a valores de τ_a/τ_m menores do que cerca de 1/9. O amortecimento critico ($\xi = 1$) corresponde ao valor $\tau_a/\tau_m = 1/4$. Como tendência geral para um motor isolado, pode considerar-se que τ_a aumenta com o aumento do tamanho e τ_m decresce levemente. O amortecimento D/J é usualmente desprezável.

Transitório de arranque directo com binário de carga proporcional à velocidade.

Neste caso o factor $M_u = 0$, pois o binário útil encontra-se representado no factor D . Das equações (5.11) e (5.12) obtém-se:

$$I_a(s) = \frac{(D + Js)U_a}{L_a Js(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{U_a}{L_a} \frac{s + \frac{D}{J}}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (5.23)$$

Em regime permanente, aplicando a fórmula da transformação de Laplace que permite obter o valor final, tem-se:

$$I_{ao} = \lim_{s \rightarrow 0} s I_a(s) = \frac{U_a D}{k_m^2 + r_a D} \quad (5.24)$$

$$\Omega_m(s) = \frac{k_m U_a}{L_a Js(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k_m U_a}{J L_a} \frac{1}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (5.25)$$

$$\omega_{mo} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_m(s) = \frac{k_m U_a}{k_m^2 + r_a D} \quad (5.26)$$

Exemplo N° 5.2

Calcular os valores finais para os motores do exemplo 1.

Motor N° 1
 $I_a = 2.95 \text{ A}$
 $\omega_m = 46.21 \text{ rad/s}$

Motor N° 2
 $I_a = 314.5 \text{ A}$
 $\omega_m = 181.84 \text{ rad/s}$

As figuras 5.3 e 5.4 representam o andamento das variáveis de estado durante o transitório de arranque com a carga definida no exemplo 5.1.

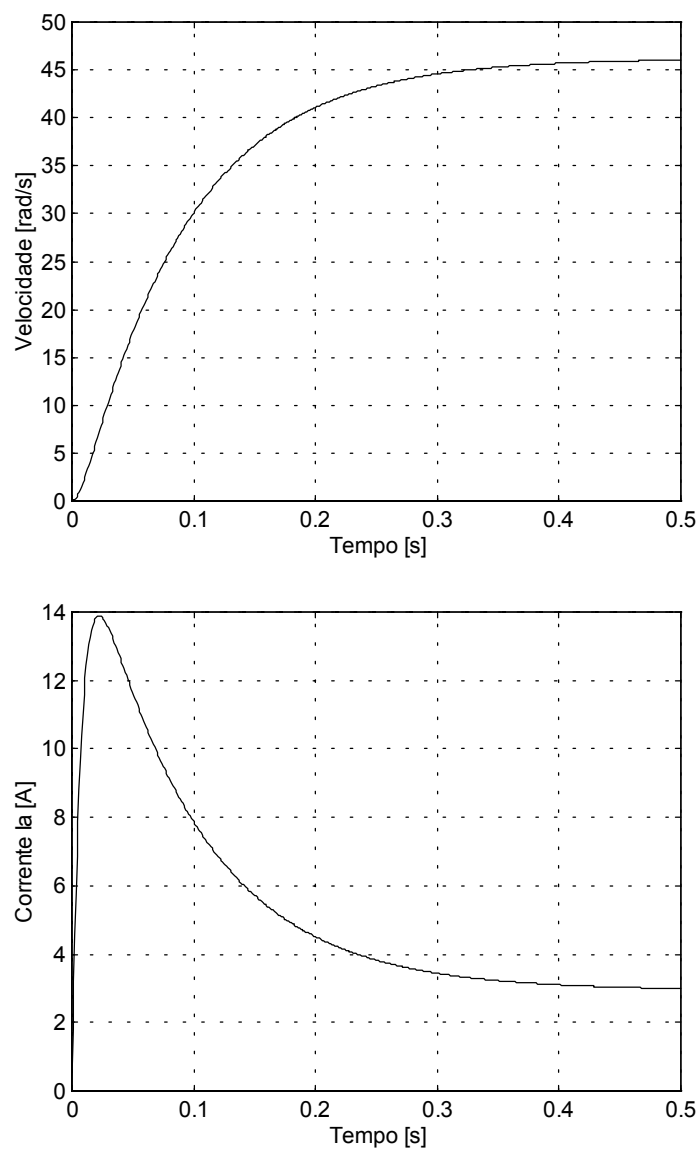


Fig. 5.3. Transitório de arranque da máquina de 1Cv.

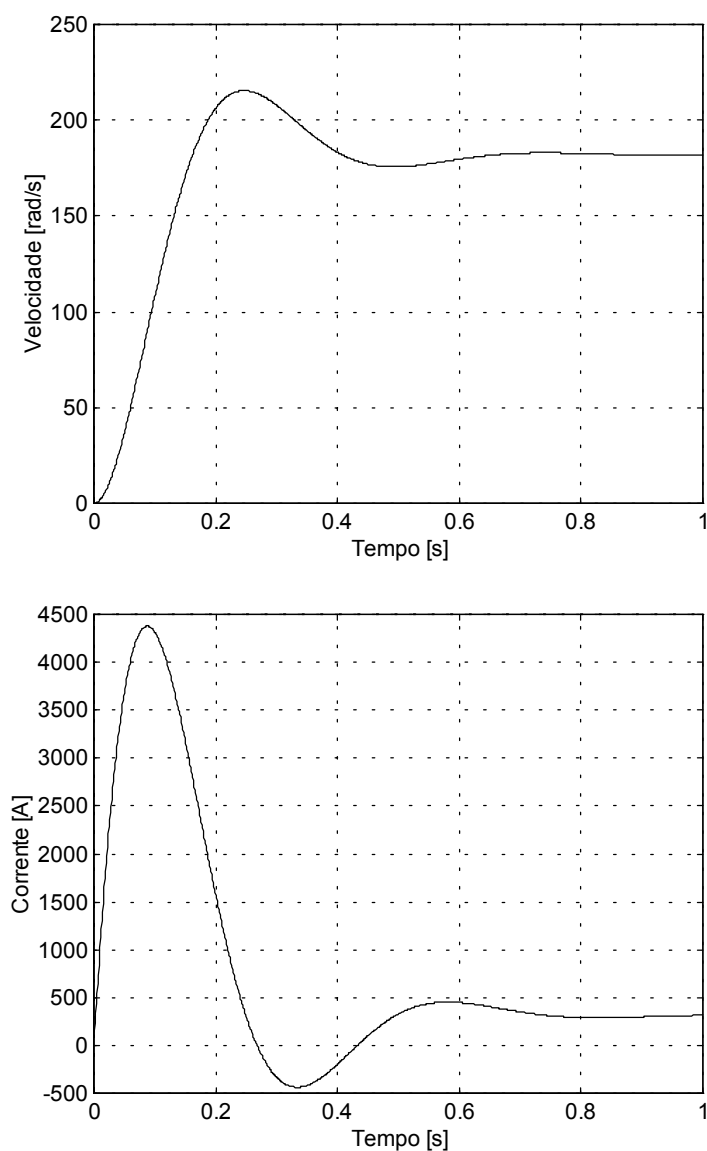


Fig. 5.4: Transitório de arranque da máquina de 100Cv.

Os valores dos factores de amortecimento relativo bem como os dos pólos e zeros são os obtidos no exemplo 5.1

Conclusões

Para o motor N° 1, $\xi=1.82$, é perfeitamente desprezável a constante de tempo eléctrica. Assim o motor comporta-se como um sistema de 1ª ordem cuja constante de tempo é a constante de tempo inercial. Nos instantes iniciais a corrente sobe tão rapidamente que quase poderia ser considerada descontínua. A resposta do sistema é a resposta que se obteria se se desprezasse o coeficiente de auto-indução do induzido.

Quanto ao motor N° 2, $\xi = 0.47$ e portanto tem um andamento oscilatório. Isto deve-se ao facto de as duas constantes de tempo (inercial e eléctrica) serem da mesma ordem de grandeza ($\tau_m=0.065s$, $\tau_a=0.0764s$). O facto de se ter um andamento oscilatório tem como consequência que a velocidade tem uma pequena sobre-elevação, o que se traduz em funcionamento da máquina como gerador ($i_a < 0$, $U_a > 0$) durante um pequeno período de tempo.

Tanto para o motor N°1 como para o motor N° 2 a corrente atinge valores bastantes elevados nos primeiros instantes. No primeiro caso atinge 4 vezes o valor de regime estacionário e no segundo 14 vezes. Assim este transitório é bastante violento e há toda a vantagem em evitá-lo. Deve notar-se, que para transitórios tão violentos, algumas das hipóteses simplificativas que fizeram poderão não ser verdadeiras e o problema exigir um tratamento mais cuidado.

Transitório resultante da aplicação de um escalão de binário.

Neste caso estuda-se a máquina numa situação diferente da anterior. Admite-se que o motor está a rodar em vazio, e que já atingiu o seu regime permanente. Subitamente é aplicado o binário nominal. Em rigor, uma vez que agora $D=0$, as constantes de tempo, ξ e ω_n , bem como os pólos e zeros deverão ser recalculados. Contudo, uma vez que estes dependem pouco do factor D , os novos valores daquelas grandezas não serão afectados significativamente.

Como não foram consideradas as condições iniciais quando se aplicou a transformação de Laplace às equações (5.4), as funções de transferência (5.13) são válidas em termos das variações das grandezas e não em termos das grandezas. Assim:

$$\Delta I_a(s) = \frac{k_m M_u}{L_a J s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k_m M_u}{L_a J} \frac{1}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (5.27)$$

com

$$\Delta I_{ao} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta I_a(s) = \frac{k_m M_u}{k_m^2 + r_a D} \equiv \frac{M_u}{k_m} \quad (5.28)$$

$$\ddot{\Omega}_m(s) = \frac{-(r_a + sL_a)M_u}{L_a J s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{M_u}{J} \frac{-\left(\frac{r_a}{L_a} + s\right)}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (5.29)$$

com

$$\omega_{mo} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta \ddot{U}_m(s) = -\frac{r_a M_u}{k_m^2 + r_a D} \cong -\frac{r_a M_u}{k_m^2} \quad (5.30)$$

Exemplo N° 5.3

Calcular as variações das grandezas no transitório de aplicação do binário de carga

Recalculando os novos valores de ω_n e ξ com $D=0$ e $M_c=M_N$, as variações que se obtêm em regime permanente são:

Motor N° 1

$$\omega_n = 34,58.$$

$$\xi = 1.98$$

$$\Delta I_a = 3.33 \text{ A} = 100\%$$

$$\Delta \omega_m = -11.9 \text{ rad/s}$$

Motor N° 2

$$\omega_n = 14,19$$

$$\xi = 0.46$$

$$\Delta I_a = 317 \text{ A} = 100\%$$

$$\Delta \omega_m = -7.17 \text{ rad/s}$$

As curvas de regime transitório encontram-se representadas nas figuras 5.5 e 5.6.

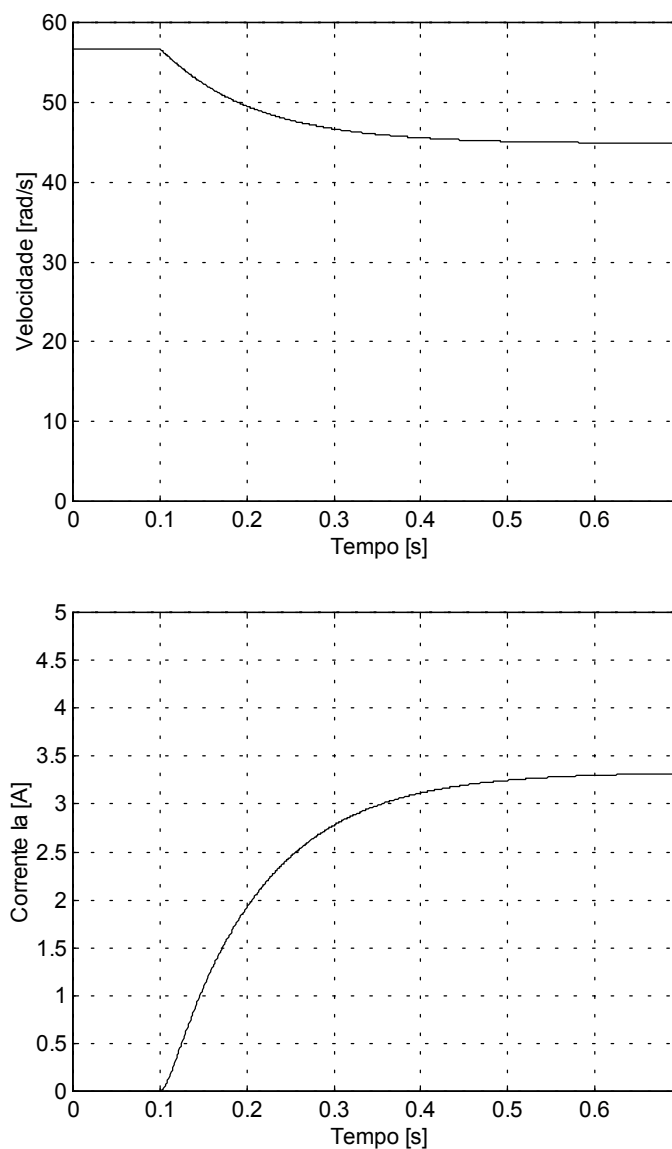


Fig. 5.5. Transitórios da máquina de 1 Cv.

Conclusões acerca da aplicação de escalão de binário

Para este tipo de transitório, enquanto que a corrente variou bastante (passou de quase zero ao valor nominal), a velocidade quase que se manteve inalterável. Esta resposta era de esperar pois é típica do motor de excitação independente. Contudo, o que há a destacar nas curvas das figuras 5.5 e 5.6 é que o comportamento transitório tem formas bastante diferentes para os dois motores devido ao facto de se ter pólos e zeros diferentes.

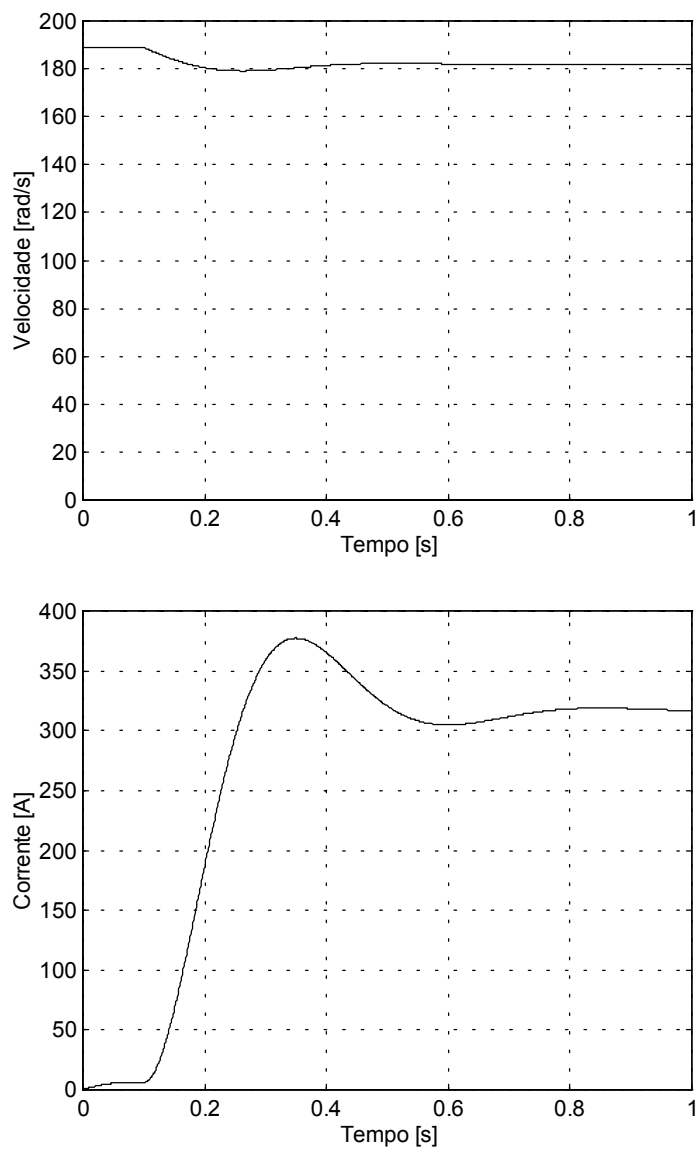


Fig. 5.6. Transitórios da máquina de 100 Cv.

Assim, para a corrente, praticamente não há sobreintensidade, o que contrasta profundamente com o transitório de arranque directo. Este tipo de resposta é diferente devido à diferente localização do zero da função de transferência.

5.4 Estudo da máquina de corrente contínua de excitação série

Introdução

O motor série tem características estáticas bastante diferentes do motor de excitação em derivação. Assim as suas aplicações são também completamente distintas. Apresenta-se a análise do motor série em regime transitório. Verifica-se que, neste caso, o sistema não é linear. Assim, não é possível estudar o sistema analiticamente e ter-se-á de recorrer a métodos numéricos. Este exemplo é estudado não só para se ficar a conhecer um pouco do comportamento do motor série, mas também para se fazer uma pequena introdução aos referidos métodos numéricos que hoje em dia estão já bem generalizados.

Modelo Matemático

Para o motor série obtemos as seguintes restrições:

$$i_f = i_a = i \quad u = u_f + u_a \quad (5.31)$$

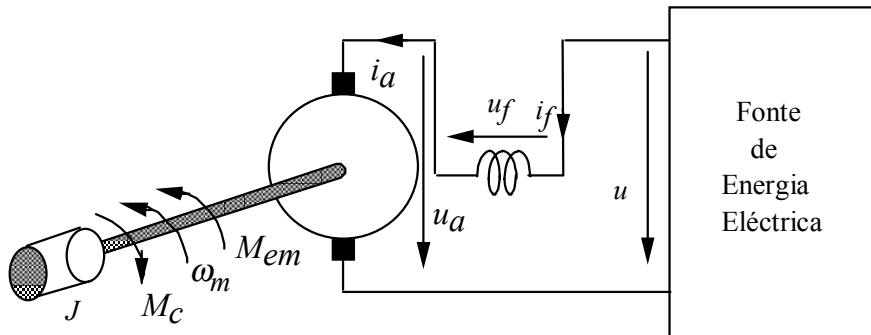


Fig. 5.7. Motor série.

As equações (5.3) e (5.7) tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} u \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f + r_a & M_o i \\ M_o i & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f + L_a & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

ou, na forma condensada,

$$[U] = [R][X] + [L][p X]$$

A presença da variável de estado i na matriz R , permite concluir que se está em presença de um sistema não linear. Sendo assim, não se pode determinar a resposta do sistema analiticamente como se fez para o motor de excitação independente. Resolve-se o problema utilizando técnicas numéricas. Comece-se por passar o sistema (5.32) para a sua forma canónica.

$$\begin{bmatrix} L_f + L_a & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ M_u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_f + r_a & M_{oi} \\ M_{oi} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

como

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

vem

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ M_u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_f + r_a & M_{oi} \\ M_{oi} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_f + r_a}{L} & -\frac{M_{oi}}{L} \\ \frac{M_{oi}}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u}{L} \\ \frac{M_u}{J} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Para a integração numérica deste sistema de equações poderá ser utilizado um dos muitos métodos de integração numérica descrito na literatura da especialidade.

Para que os resultados assim alcançados sejam correctos, é necessário, para o problema em questão, verificar se o método é ou não convergente. Para os problemas usuais em máquinas eléctricas tal verifica-se se impuser um passo de cálculo h muito inferior à menor constante de tempo do sistema. Como à partida não se conhece a resposta do sistema, vai-se obtendo várias soluções provisórias com vários passos de

cálculo, e em função das respostas que se forem obtendo, conclui-se se se tem respostas correctas ou incorrectas.

O transitório que se pretendeu simular, foi do arranque directo em que o binário da carga tem um valor constante e igual a 300 N.m. Os resultados encontram-se representados na figura 5.8.

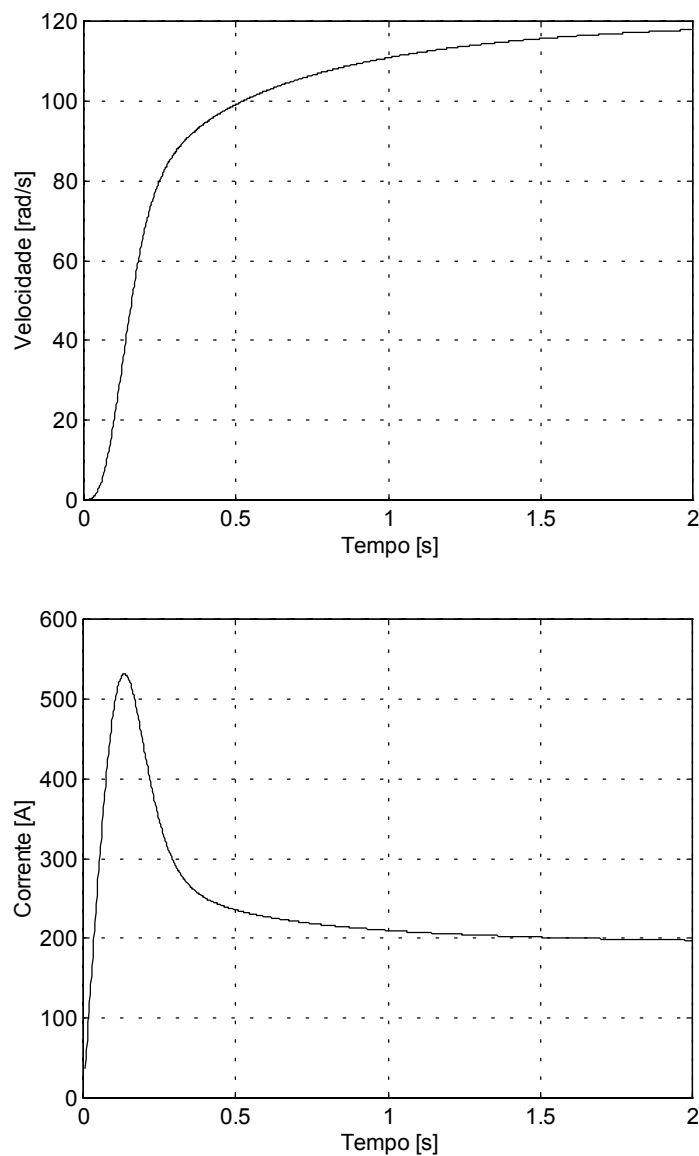


Fig. 5.8. Arranque directo do motor série.

Exemplo N° 5.4

Para ilustrar a integração das equações (5.38), vai calcular-se a evolução no tempo das grandezas i e ω_m para um motor de 50CV no transitório de arranque em que é aplicado ao motor o seu binário nominal. Admite-se que esse binário de carga é constante e não depende da velocidade. Admite-se que em série com o motor se encontra uma bobina cujo coeficiente de auto-indução é importante face a $L_a + L_f$.

Os parâmetros são os seguintes:

$$P_N = 50 \text{ Cv}, \quad U = 200 \text{ V}, \quad M_O = 0.00795 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1} \quad R_T = 75 \text{ m} \Omega$$

$$M_u = 300 \text{ Nm (const.)}, \quad \omega_{mN} = 125 \text{ rad/s}, \quad J = 3.64 \text{ Kg m}^2$$

$$L_T = 0.033 \text{ H}, \quad D = 0$$

Linearização do modelo de estado do motor de corrente contínua de excitação em série.

Como se acabou de ver, o modelo de estado do motor série pode ser posto na forma de um sistema de duas equações diferenciais não lineares.

Regra geral, os sistemas electromecânicos podem ser descritos por sistemas de ordem n deste tipo. Frequentemente é necessário analisar a estabilidade desses sistemas. Um dos métodos mais simples e mais usual é a utilização, não de um modelo de estado original, mas de um outro modelo que resulta da sua linearização em torno de um determinado ponto de funcionamento.

O estudo do motor série foi escolhido propositadamente para a descrição e exemplificação de tal técnica. Para isso vai-se partir das equações (5.36) e linearizá-las em torno de um ponto de funcionamento genérico (i_o, ω_{mo}) . Assim tem-se:

$$u = R i + M_O i \omega_m + L \frac{di}{dt} \quad (5.37)$$

$$M_u = M_O i^2 - D \omega_m - J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (5.38)$$

Se a máquina estiver a funcionar no ponto (i_o, ω_{mo}) , e esse ponto constituir um ponto de regime estacionário, ter-se-á:

$$u_o = R i_o + M_O i_o \omega_{mo} \quad (5.39)$$

$$M_{uo} = M_O i_o^2 - D \omega_{mo} \quad (5.40)$$

$$\text{pois} \quad i = \text{cte} \quad \dot{i} = 0$$

$$\omega_m = \text{cte} \quad \dot{\omega}_m = 0$$

Se houver variações nas grandezas de entrada u e M_u , as funções de estado também sofrerão variações. Assim:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_0 + \Delta u \\ M_u &\rightarrow M_{u0} + \Delta M_u \\ i &\rightarrow i_0 + \Delta i \\ \omega_m &\rightarrow \omega_{m0} + \Delta \omega_m \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ter-se-á:

$$(u_0 + \otimes u) = R(i_0 + \ddot{A} i) + M_o(i_0 + \ddot{A} i)(\omega_{m0} + \ddot{A} \omega_m) + L \frac{d}{dt}(i_0 + \ddot{A} i) \quad (5.42)$$

$$(M_u + \otimes M_u) = M_o(i_0 + \ddot{A} i)^2 - D(\omega_{m0} + \ddot{A} \omega_m) - J \frac{d}{dt}(\omega_{m0} + \ddot{A} \omega_m) \quad (5.43)$$

Desenvolvendo, subtraindo as equações 5.39 e 5.40 e desprezando infinitésimos de segundo grau, obtém-se:

$$\otimes u = R \otimes i + M_o i_0 \otimes \omega_m + M_o \omega_{m0} \otimes i + L \frac{d \otimes i}{dt} \quad (5.44)$$

$$\otimes M_u = 2M_o i_0 \otimes i - D \otimes \omega_m - J \frac{d \otimes \omega_m}{dt}$$

Pondo na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \otimes u \\ \otimes M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + M_o \omega_{m0} & M_o i_0 \\ 2M_o i_0 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} i \\ \ddot{A} \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d \ddot{A} i}{dt} \\ \frac{d \ddot{A} \omega_m}{dt} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

O sistema de equações (5.45) constitui o modelo de estado linearizado em torno do ponto de funcionamento (i_0, ω_{m0}) . Neste caso i_0 e ω_{m0} não são variáveis de estado mas valores constantes. As funções de estado são agora $(\Delta i$ e $\Delta \omega_{m0})$. O sistema de equações (5.45) representa um sistema linear que se aproxima do modelo inicial (5.36) junto do ponto de funcionamento (i_0, ω_{m0}) . A matriz $[L]$ do modelo linearizado coincide com a matriz $[L]$ do modelo inicial. A matriz $[R]$ do modelo linearizado é função das grandezas i_0 e ω_{m0} , ou seja do ponto de funcionamento. Assim, deve concluir-se que para um determinado sistema electromecânico o modelo resultante da linearização em torno do ponto de funcionamento não é único sendo válido apenas para pequenas perturbações. Permite contudo determinar a estabilidade do ponto (i_0, ω_{m0}) .

Para tal pode utilizar-se as técnicas usadas para sistemas lineares. Pode definir-se funções de transferência, determinar pólos do sistema etc.

Determinação dos pólos do modelo linearizado.

O polinómio característico será dado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R + M_o \omega_o) + Ls & M_o i_o \\ 2M_o i_o & -D - Js \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [(R + M_o \omega_o) + Ls](-D - Js) - 2M_o^2 i_o^2$$

$$-\Delta = LJs^2 + [LD + J(R + M_o \omega_o)]s + 2M_o^2 i_o^2 + D(R + M_o \omega_o)$$

Para a determinação dos pólos far-se-á

$$\Delta = 0 \rightarrow as^2 + bs + c = 0$$

$$a = LJ$$

$$b = LD + J(R + M_o \omega_o)$$

$$c = 2M_o^2 i_o^2 + D(R + M_o \omega_o)$$

Como os valores de a , b e c são sempre positivos, pode-se concluir que o motor série é sempre estável.

Exercícios

1. Um motor de corrente contínua de excitação independente é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

$$U_n=220\text{V} \quad N_N=1500 \text{ rpm} \quad I_n=10\text{A}$$

$$r_f=240\Omega \quad L_f=3.6\text{H} \quad r_a=2.0\Omega \quad L_a=2\text{mH}$$

$$J=0.0684 \text{ kgm}^2$$

Sabe-se que a 1200rpm e com uma corrente de excitação de 0.5A a f.e.m. em vazio é igual a 240V.

- a) Estabeleça o modelo matemático que lhe permita estudar o regime transitório desta máquina. Quais as hipóteses em que se encontra baseado este modelo.
- b) No instante $t=0$, a corrente de excitação encontra-se em regime permanente e vale 0.5A, e o induzido encontra-se ligado a uma fonte de tensão contínua igual a 220V. No veio não se encontra aplicada qualquer carga.
 - 2.1 Qual a velocidade de rotação da máquina.
 - 2.2 Aplica-se um escalão de binário igual ao binário nominal. Determine o andamento da corrente no induzido e da velocidade em função do tempo. Qual o tempo necessário para se estabelecer o regime permanente.

2. Considere o motor N° 2 do exemplo 5.1. Na situação em que $D=0$ e aplicado numa situação com um momento de inércia igual a 48 vezes o momento de inércia da máquina. Recalcule os valores dos parâmetros característicos. Comente os resultados.

3. Considere o motor N° 2 do exemplo 5.1. Liga-se uma resistência em série com o circuito do induzido de modo a limitar a corrente de arranque ao valor nominal. Calcule:

- a) Os valores dos parâmetros característicos. Comente os resultados.
- b) Determine o valor da velocidade em regime permanente quando a máquina se encontrar em vazio. Qual o tempo de arranque.
- c) Quando a carga for proporcional à velocidade e à velocidade nominal corresponder o binário nominal calcule o novo valor de velocidade em regime permanente e o tempo de arranque.

4. Considere o motor N° 1 do exemplo 1. Este motor vai ser aplicado numa situação que requer uma fonte de alimentação com tensão ajustável. Esta fonte de alimentação é caracterizada por possuir uma componente alternada de frequência elevada (300Hz). Para reduzir esta componente alternada utiliza-se uma bobina de valor elevado em série com o induzido. Considere que esta bobina tem um valor 50 vezes o valor de L_a .

- a) Calcule os novos valores das constantes do motor, dos pólos e zeros etc.
- b) Determine as respostas no arranque directo e de aplicação de escalão de binário de carga.
- c) Comente os resultados.

5. Discuta a alteração da resposta do motor de excitação separada admitindo que a máquina está a funcionar não a 100% do seu fluxo nominal mas a 50%.

6. Como analisaria o transitório da passagem da tensão de excitação nominal para 50%, funcionando a máquina (de excitação separada) em vazio?

7. Neste capítulo foram analisadas as máquinas de excitação separada e de excitação série. Tente modelizar e tirar conclusões sobre o regime dinâmico da máquina de excitação composta.

8. No arranque das máquinas de corrente contínua utilizaram-se no passado arrancadores realizados com resistências que se inseriam em série com o circuito do induzido (ainda se encontram a funcionar alguns destes arrancadores em instalações antigas). Estas resistências são realizadas com n pontos e $n-1$ elementos. Define-se uma corrente do induzido máxima $I_{a(max)}$ que não deve ser ultrapassada e uma corrente do induzido mínima $I_{a(min)}$ na qual se deve fazer a comutação para o ponto seguinte.

- a) Desprezando o valor do coeficiente de indução do induzido deduza a fórmula prática:

$$\frac{I_{a(max)}}{I_{a(min)}} = \frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} = \dots = \frac{R_2}{R_a}$$

e

$$\left(\frac{I_{a(max)}}{I_{a(min)}} \right)^{(n-1)} = \frac{R_n}{R_a}$$

Onde R_n representa o valor da soma das resistências que se encontram em série.

- b) Considerando a máquina do exemplo 2 calcule o número de pontos necessários, as várias constantes de tempo que resultam dos vários troços, e determine as expressões analíticas do andamento da velocidade e de corrente do induzido para os vários troços durante o arranque. Considere $I_{a_{max}}=2I_N$ e $I_{a_{min}}=I_N$.

9. O sistema Ward-Leonard tem duas máquinas de corrente contínua iguais, uma funcionando como gerador accionada por uma máquina de velocidade constante e a outra a funcionar como motor. Estas duas máquinas encontram-se com os dois circuitos do induzido ligados em paralelo. O circuito de excitação do motor encontra-se alimentado com uma fonte de tensão contínua e constante enquanto que o circuito de excitação do gerador se encontra alimentado por uma fonte de tensão variável. Através desta fonte varia-se a excitação do gerador que por sua vez vai variar a tensão aos terminais do induzido e por consequência a velocidade do motor.

- a) Determine o modelo matemático que lhe permita estudar este sistema.
- b) Calcule a resposta de velocidade do motor para as seguintes tensões aplicadas aos terminais do circuito de excitação do gerador:
- b1) Um escalão de tensão contínua.
 - b2) Uma variação em rampa desde zero até ao valor nominal da tensão de excitação.
 - b3) Uma variação sinusoidal de frequência angular ω_c e amplitude V_c .

Considere o amortecimento mecânico desprezável para o motor que se encontra em vazio e que tem um momento de inércia J .

Porque é que a auto-indução do induzido das duas máquinas pode ser ignorada?

10. Considere a máquina de corrente contínua de excitação série do exemplo 5.4. Esta máquina vai ser ligada a uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz igual a 220V e frequência igual a 50Hz. Considere que o binário de carga é igual sucessivamente a 150Nm e 300Nm.

- a) Utilizando os conceitos de amplitude complexa que se utilizam para analisar circuitos em regime permanente em corrente alternada, determine o diagrama vectorial que lhe permite representar o regime permanente desta máquina.
- b) Calcule, para as duas situações referidas, os valores da velocidade de rotação e do factor de potência.

11. Utilizando as técnicas estudadas neste capítulo, demonstre que o gerador série é instável quando debita sobre uma resistência de carga e quando se encontra directamente ligado a uma rede de corrente contínua de tensão constante.

- a) Admita velocidade constante
- b) Admita uma situação de frenagem

ANEXO

Resposta ao escalão de sistemas de segunda ordem

A determinação da resposta no tempo das variáveis de estado é realizada pela inversão da transformada de Laplace respectiva. Esta inversão pode ser feita recorrendo a técnicas bem conhecidas ou a tabelas de transformadas de Laplace. Verifica-se que os problemas que se nos põem são de dois tipos. O primeiro é o sistema de segunda ordem sem zeros, o segundo, é o sistema de segunda ordem com um zero.

Seguidamente vai analisar-se estes dois casos recorrendo a formas normalizadas.

A - Sistema normalizado de segunda ordem sem zero

A forma normalizada da função de transferência de um sistema de 2ª ordem sem zero escreve-se:

$$F(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (A1)$$

para $v(t) \rightarrow$ escalão unitário, tem-se $V(s) = \frac{1}{s}$ logo

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (A2)$$

Recorrendo a uma tabela de transformadas, obtém-se:

$$\xi < 1$$

$$X(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos \xi \right) \quad (A3)$$

$$\xi > 1$$

$$s_1 = -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_1 - s_2 = 2 \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$X(t) = 1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \quad (A4)$$

O andamento da função $X(t)$ encontra-se ilustrado na figura A-1.

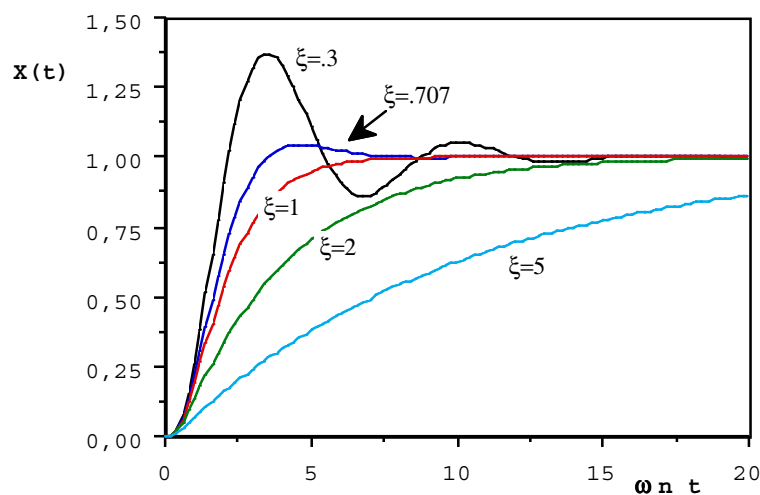


Fig. A1 Resposta no tempo da variável de estado $X(t)$ de um sistema normalizado para vários factores de amortecimentos relativo (ξ)

B - Sistema normalizado de 2ª ordem com zero

Neste caso tem-se como forma normalizada:

$$F(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{z} (s + z)}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (A5)$$

Deve procurar-se a transformada inversa da função

$$X(s) = \frac{\omega_n^2}{z} \frac{s + z}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A6})$$

Recorrendo a uma tabela, obtém-se:

$$\xi < 1$$

$$a = -\xi\omega_n$$

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\alpha = \text{artg} \frac{\omega_1}{a + z} - \text{artg} \frac{\omega_1}{a}$$

$$X(t) = 1 + A e^{at} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (\text{A7})$$

$$A = \frac{\sqrt{a^2 + \omega_1^2} \sqrt{(a + z)^2 + \omega_1^2}}{z \omega_1}$$

$$\xi > 1$$

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$X(t) = 1 + B e^{s_1 t} - C e^{s_2 t} \quad (\text{A8})$$

$$B = \frac{s_2}{z} \frac{s_1 + z}{s_1 - s_2}$$

$$C = \frac{s_1}{z} \frac{s_2 + z}{s_1 - s_2}$$

As funções representadas pelas equações (A7) e (A8) encontram-se representadas na figura A2.

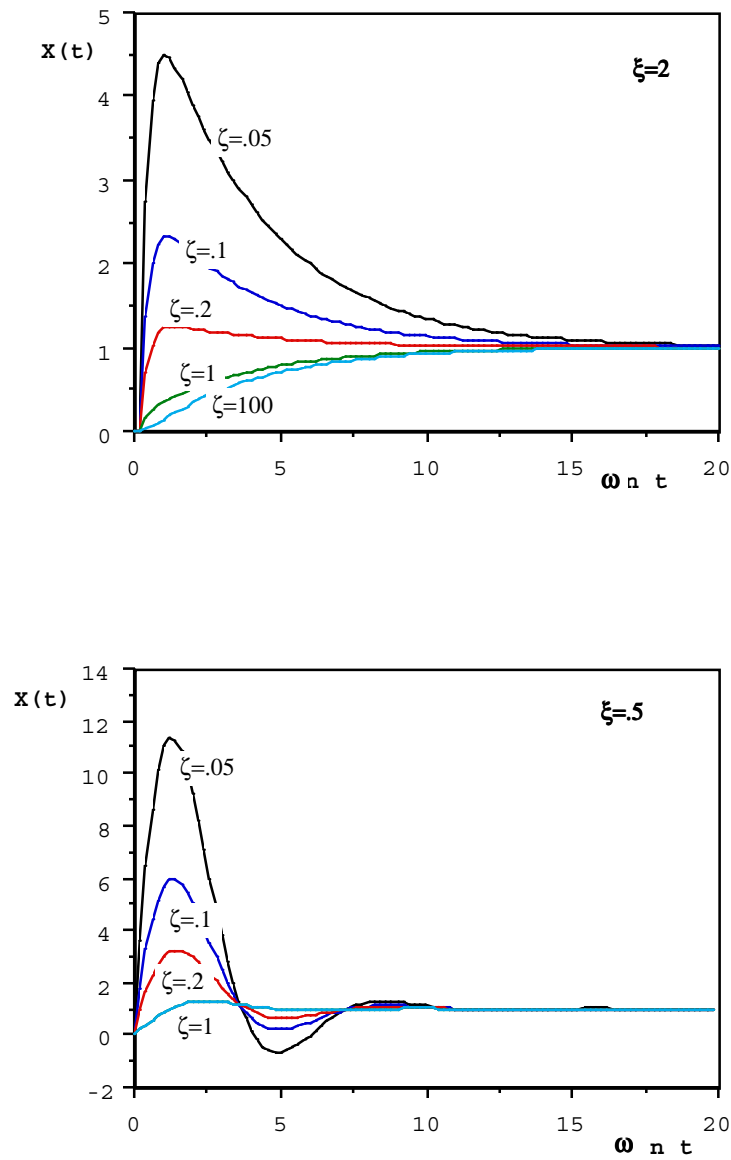


Fig. A2 Resposta no tempo da variável normalizada $X(t)$.

A - família de curvas para $\xi = 2$ e $\zeta = z/\omega_s$ variável

B - família de curvas para $\xi = 0,5$ e $\zeta = z/\omega_s$ variável

Capítulo 6

Estudo dos transformadores em regime transitório

6.1 Transformador monofásico de dois enrolamentos

Modelo matemático

Seja o transformador representado na figura 6.1. Considere-se que o primário (índice 1) se encontra ligado a uma fonte de energia eléctrica e que o secundário (índice 2) se encontra ligado a uma carga.

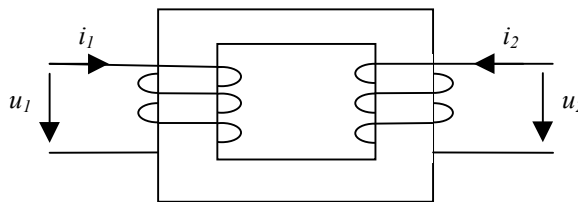


Figura 6.1. Esquema do transformador monofásico.

Admite-se a hipótese de circuito magnético linear e represente-se a relação entre os fluxos e as correntes pela equação matricial.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

O modelo do transformador virá:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6.2.a)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (6.2.b)$$

Este modelo traduz-se por duas equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. É um modelo ao qual se pode aplicar a transformação de Laplace.

Em vez das grandezas do secundário é frequente utilizarem-se grandezas do secundário reduzidas ao primário ou grandezas do primário reduzidas ao secundário. Neste caso as expressões tem a mesma forma, tomando os parâmetros valores diferentes. As grandezas referidas ao primário são afectadas de um determinado factor de proporcionalidade. No que se segue, vai admitir-se que no modelo representado pelas equações 6.2 se está a trabalhar com valores reduzidos.

Aplicando a transformação de Laplace, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + L_1 s & Ms \\ Ms & r_2 + L_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Em que $U_1(s)$, e $U_2(s)$ são as transformações de Laplace de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ respectivamente e $I_1(s)$, e $I_2(s)$ as transformações de Laplace de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

Normalmente são conhecidas as tensões aplicadas e pretende calcular-se as correntes. Assim é necessário resolver o sistema algébrico (6.3).

Para a resolução completa do problema, é necessário introduzir as equações da carga no secundário e as equações da fonte no primário. Isso será feito posteriormente, e como se verá, não alterará qualitativamente a análise que se fará a seguir.

Invertendo a matriz das impedâncias, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} r_2 + L_2 s & -Ms \\ -Ms & r_1 + L_1 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Onde:

$$\Delta(s) = (r_1 + L_1 s)(r_2 + L_2 s) - M^2 s^2 \quad (6.5)$$

$$\Delta(s) = r_1 r_2 + (L_1 r_2 + L_2 r_1)s + \sigma L_1 L_2 s^2 \quad (6.6)$$

em que:

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (6.7)$$

Igualando a equação 6.6 a zero determinam-se os pólos do sistema. Estes são determinantes para o conhecimento do comportamento do sistema em regime transitório. No caso que estamos a analisar verifica-se que os pólos são, em geral, valores reais negativos e é possível obter expressões analíticas aproximadas para determinar os seus valores.

Determinação de expressões analíticas aproximadas para os pólos

Considere-se o polinómio característico (6.6). As suas raízes podem obter-se facilmente utilizando a equação resolvente das equações do segundo grau. Contudo, uma vez que a impedância de dispersão é normalmente muito pequena comparada com a impedância de magnetização, é possível obter expressões simples para os valores dos pólos e das respectivas constantes de tempo.

Assim, para frequências muito baixas faz-se a aproximação $s^2 \rightarrow 0$ e o determinante reduz-se a:

$$r_1 r_2 + (L_1 r_2 + L_2 r_1) s_1 = 0 \quad (6.8)$$

donde:

$$s_1 = -\frac{r_1 r_2}{L_1 r_2 + L_2 r_1} \quad (6.9)$$

A que corresponde a constante do tempo

$$\tau_m = -\frac{1}{s_1} = \frac{L_1}{r_1} + \frac{L_2}{r_2} = \tau_{10} + \tau_{20} \quad (6.10)$$

Esta constante do tempo é relativamente elevada pois na sua expressão figuram as indutâncias próprias que tomam valores elevados. O pólo correspondente encontra-se assim próximo da origem.

Considerem-se agora frequências muito elevadas. Neste caso é o termo independente que é desprezável. Assim:

$$(L_1 r_2 + L_2 r_1) s + \sigma L_1 L_2 s^2 = 0 \quad (6.11)$$

Que tem como soluções:

$$s_1 = 0 \quad (6.12)$$

$$s_2 = -\frac{L_1 r_2 + L_2 r_1}{\sigma L_1 L_2} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{r_2}{L_2} + \frac{r_1}{L_1} \right) \quad (6.13)$$

A solução $s_1=0$ corresponde a uma aproximação grosseira da raiz obtida anteriormente com mais precisão, equação 6.9. Consideremos assim apenas a última solução.

Este pólo está necessariamente associado à dispersão. A correspondente constante do tempo vale:

$$\tau_d = \sigma \frac{1}{\frac{1}{\tau_{10}} + \frac{1}{\tau_{20}}} \quad (6.14)$$

As expressões 6.10 e 6.14 permitem um cálculo analítico das duas constantes de tempo do transformador. Visto σ ser um valor baixo, estas duas constantes de tempo terão valores bastante diferentes sendo $\tau_m \gg \tau_d$.

A expressão para o determinante poderá escrever-se da seguinte forma:

$$\Delta(s) = r_1 r_2 (1 + s \tau_m)(1 + s \tau_d) \quad (6.15)$$

Interpretação.

Utilizando esquemas equivalentes reduzidos é fácil verificar que as duas constantes de tempo podem ser determinadas a partir dos pontos indicados na figura 6.2.

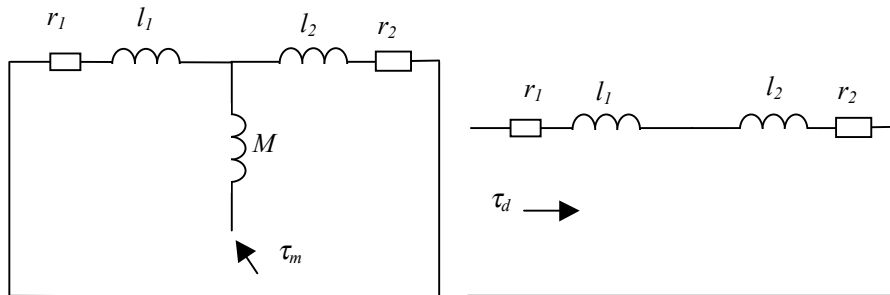


Figura 6.2. Obtenção das constantes de tempo do transformador.

Quando existir um circuito RL na carga, os valores dos parâmetros desta carga poderão ser incorporados nos parâmetros do transformador e considerar que este se encontra em curto-circuito. Neste caso a resistência do secundário a considerar será a soma da resistência do secundário com o valor da resistência da carga. O mesmo se passa para o coeficiente de indução própria do secundário. As expressões atrás deduzidas continuam válidas. Neste caso o valor da dispersão equivalente vai ficar consideravelmente aumentado.

Um aspecto interessante do ponto de vista teórico, consiste no caso em que não existe dispersão, isto é $\sigma=0$. Neste caso a constante de tempo τ_d tende para zero, o que é o mesmo que dizer que o pólo associado tende para infinito. Nesta situação o modelo matemático fica reduzido a um sistema de primeira ordem. No esquema equivalente os coeficientes de indução que representam a dispersão são nulos, $l_1=l_2=0$. As correntes i_1 e i_2' podem sofrer descontinuidades embora estas descontinuidades estejam sujeitas à restrição $\Delta i_1 + \Delta i_2' = 0$. Note-se que a soma destas duas correntes é a corrente de magnetização que circula por uma bobina no esquema equivalente e por consequência não pode sofrer descontinuidades. Nesta situação o determinante da matriz dos coeficientes de indução é nulo.

Exemplo 6.1

Cálculo das constantes de tempo de um transformador.

Considere um transformador monofásico com os seguintes parâmetros:

$$r_1=0,72\Omega \quad r_2=0,72\Omega \quad l_1=l_2=0,0029H \quad M=14,22H$$

a) Calcule as constantes de tempo relativas a este transformador e verifique se as aproximações referidas são aceitáveis.

b) Considere uma carga resistiva no secundário igual à carga nominal ($R=116.2\Omega$)

Resolução:

a) Atendendo às equações 6.6 a 6.14, tem-se:

$$\sigma = 4.12 \cdot 10^{-4}$$

Os valores exactos para os pólos são obtidos pela resolução da equação do segundo grau 6.6. Obtém-se:

$$S_1 = -245.7391 \quad S_2 = -0.0253$$

Por outro lado, tem-se:

$$\tau_{10}=\tau_{20}=19.7506 \text{ s} \quad \tau_m=39.5 \text{ s}$$

$$\tau_d=4.1 \text{ ms}$$

Os valores aproximados para os pólos são:

$$S_1=-245.7644 \quad S_2=-0.0253$$

Como se pode ver as expressões que determinam os valores dos pólos dão uma precisão aceitável. Note-se também que a relação entre as duas constantes de tempo é superior a 1000.

b) Com carga resistiva, os cálculos são semelhantes. Obtém-se:

$$S_1=-19907 \quad S_2=-0.000005$$

Utilizando as expressões desenvolvidas, tem-se:

$$\tau_{10}= 19.7506 \text{ s} \quad \tau_{20}= 0.1227 \text{ s} \quad \tau_m=19.8732 \text{ s}$$

$$\tau_d= 0,05 \text{ ms}$$

Os valores aproximados para os pólos são:

$$S_1=-19907 \quad S_2=-0.05$$

Funções de transferência

Fazendo os produtos matriciais da equação 6.4 obtêm-se:

$$I_1(s) = Y_{11}(s)U_1(s) + Y_{12}(s)U_2(s) \quad (6.16)$$

$$I_2(s) = Y_{21}(s)U_1(s) + Y_{22}(s)U_2(s) \quad (6.17)$$

onde:

$$Y_{11}(s) = \frac{(1 + \tau_{20}s)}{r_1(1 + s\tau_m)(1 + s\tau_d)} \quad (6.18)$$

$$Y_{12}(s) = \frac{-Ms}{r_1r_2(1 + s\tau_m)(1 + s\tau_d)} \quad (6.19)$$

$$Y_{21}(s) = Y_{12}(s) \quad (6.20)$$

$$Y_{22}(s) = \frac{(1 + \tau_{10}s)}{r_2(1 + s\tau_m)(1 + s\tau_d)} \quad (6.21)$$

Estas funções de transferências têm as dimensões de uma admitância e relacionam as transformadas de Laplace das correntes com as transformadas de Laplace das tensões aplicadas ao transformador.

Mapas de pólos e zeros

O transformador é caracterizado por dois pólos reais: um próximo da origem que está associado à constante de tempo de magnetização e o outro longe da origem associado à constante de tempo de dispersão. Enquanto que os pólos são iguais em todas as funções de transferência, os zeros dependem da função de transferência que se estiver a considerar.

A figura 6.3 ilustra este aspecto.

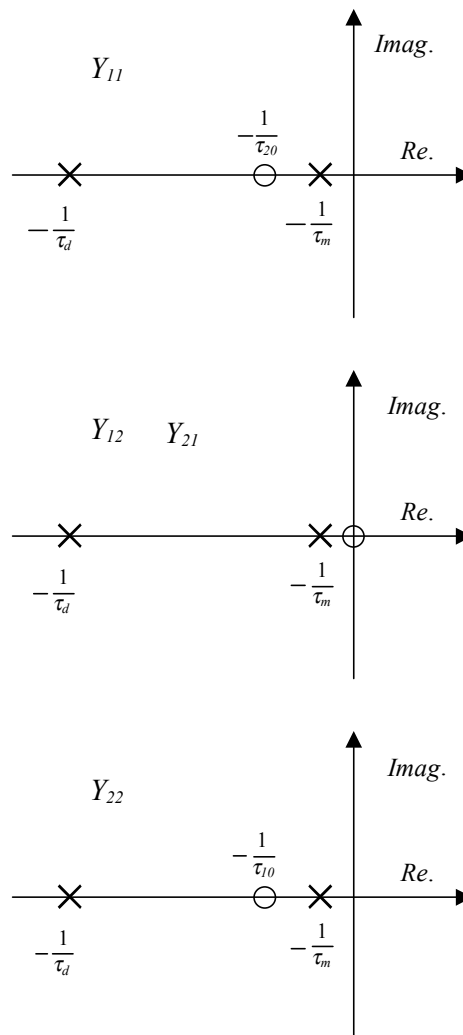


Figura 6.3. Mapa de pólos e zeros das admitâncias.

Transformador em vazio

Quando a corrente $I_2 = 0$, o modelo do transformador reduz-se a:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad \psi_1 = L_1 i_1 \quad (6.22)$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} \quad \psi_2 = M i_1 \quad (6.23)$$

A relação entre os transformadas de Laplace da corrente no primário e da tensão no primário é dada por uma função de transferência que se pode traduzir por:

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{r_1 + L_1 s} = \frac{1}{r_1} \frac{U_1(s)}{1 + s\tau_{10}} \quad (6.24)$$

Só existe uma constante de tempo dada por τ_{10} . Note-se que esta constante de tempo pode ser obtida de τ_m fazendo r_2 tender para infinito.

A relação entre a tensão no secundário e a tensão no primário pode ser obtida através de:

$$U_2(s) = s\psi_2(s) = sMI_1(s) = \frac{1}{r_1} \frac{sM}{1 + s\tau_{10}} U_1(s) \quad (6.25)$$

A função de transferência 6.25 traduz-se por um zero na origem e num pólo correspondente à constante de tempo τ_{10} . O seu diagrama de Bode será o que se encontra representado na figura 6.4.

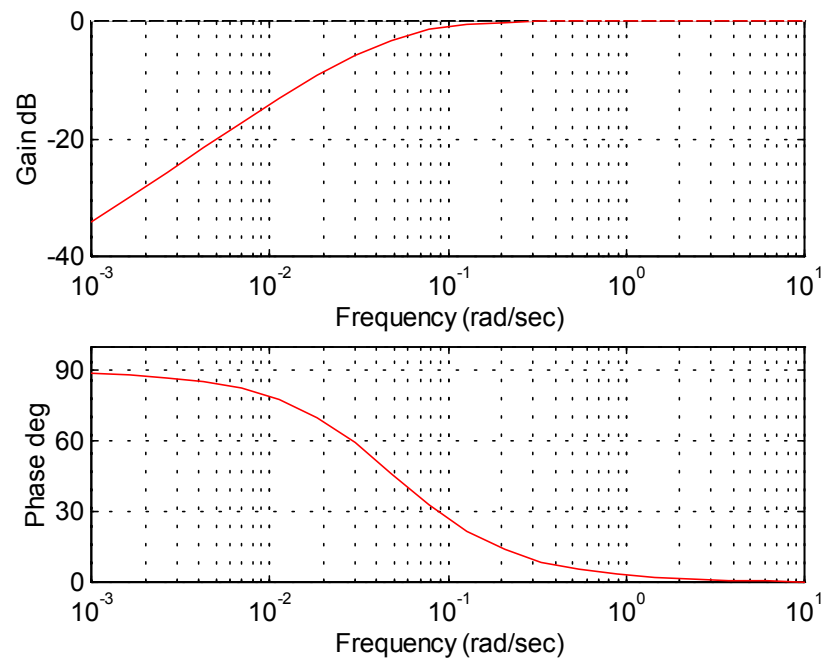


Figura 6.4. Diagrama de Bode do transformador em vazio.

Facilmente se pode concluir que o transformador só funcionará para frequências superiores a um determinado valor que depende da constante de tempo τ_{10} .

Exemplo 6.2

Cálculo da frequência de corte do transformador em vazio.

Considere o transformador do exemplo 6.1. Calcule a frequência de corte quando este se encontrar em vazio.

Resolução

A frequência de corte é dada por

$$\omega_{\text{crit}} = 1/\tau_{10}$$

Neste caso obtém-se

$$\omega_{\text{crit}} = 0.05 \text{ rad/s}$$

O que corresponde a 0,008 Hz

Arranque do transformador em vazio. Saturação magnética

No regime transitório de ligação à rede surge a possibilidade do aparecimento de correntes elevadas devido à saturação do ferro no núcleo do transformador. Este

fenómeno não está representado no modelo que temos vindo a analisar que não considera a saturação do ferro.

No transformador em vazio, e desprezando a resistência do primário, tem-se $u_1 = d\psi_1/dt$. Se num instante $t=0$ se se aplicar uma tensão sinusoidal, a solução da equação anterior terá duas componentes: a resposta forçada ψ_f e a resposta livre ψ_l . Considerando que o núcleo se encontra desmagnetizado e que no instante inicial se aplica a tensão no momento em que passa por zero (esta é a pior situação) tem-se $\psi_l(t=0) = -\psi_f(t=0)$. O fluxo atinge aproximadamente o dobro do seu valor em regime permanente meio período depois. Como há saturação, a este valor corresponde uma corrente muito elevada.

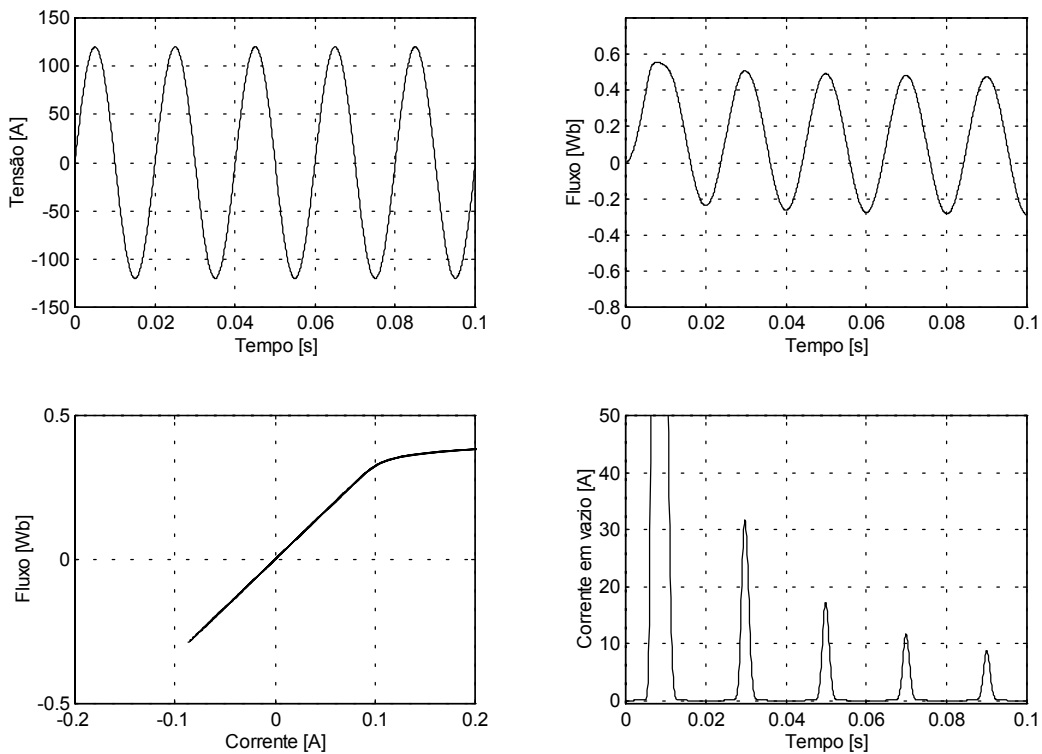


Figura 6.5. Transitório de arranque do transformador em vazio.

A figura 6.5, obtida através do programa de simulação que se encontra em anexo a este capítulo, ilustra este transitório. O fluxo no núcleo vai perdendo a sua componente de regime livre e a corrente atinge valores muito elevados nos primeiros instantes. Note-se que a figura está traçada numa escala que não permite ver a corrente de regime

permanente. O valor máximo da corrente atinge os 250A (Não visíveis na figura). Em regime permanente obtém-se a figura 6.6. esta figura foi obtida com o mesmo programa de simulação.

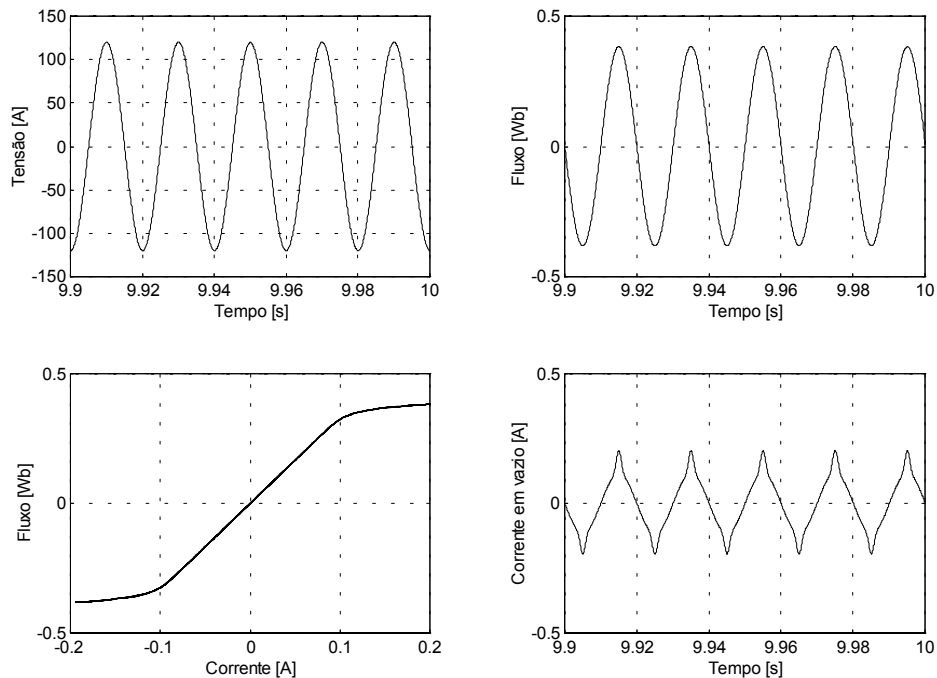


Figura 6.6. Regime permanente em vazio.

A figura 6.7 mostra o andamento das tensões do primário e do secundário para o mesmo transitório da figura 6.5. Note-se que apesar dos picos elevadíssimos da corrente do primário, a forma de onda da tensão do secundário tem uma forma de onda quase sinusoidal não se traduzindo este fenómeno num mau funcionamento considerável do lado do secundário.

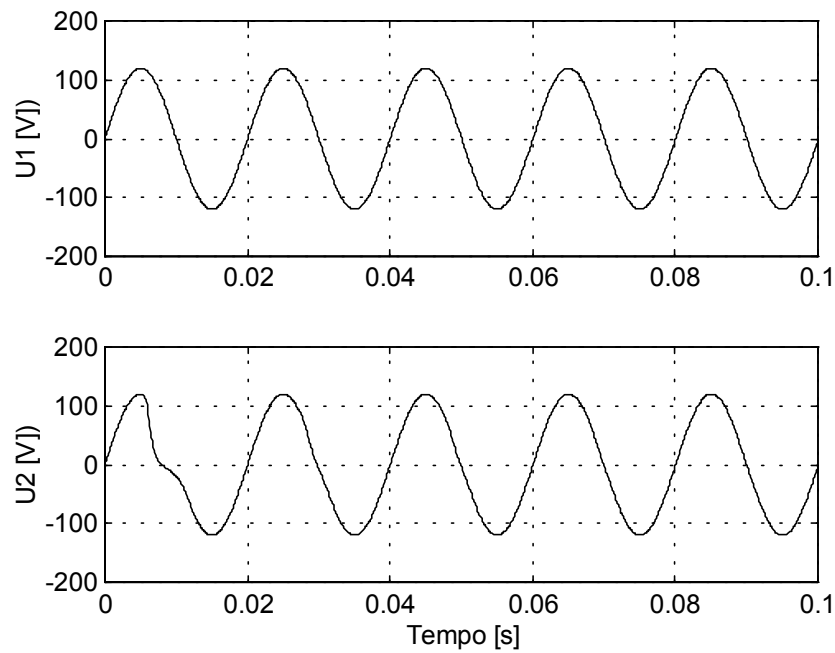


Figura 6.7. Transitório de arranque do transformador em vazio.

Transformador em curto-circuito

Considere-se um transformador em curto-circuito no secundário com o esquema equivalente reduzido representado na figura 6.8.

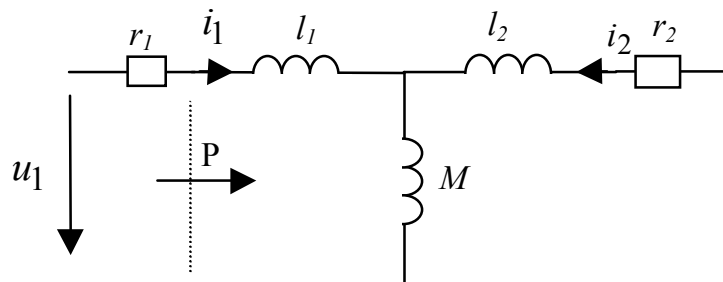


Figura 6.8. Circuito equivalente.

A impedância equivalente vista do ponto P Pode ser calculada por:

$$Z_{eq}(s) = sl_1 + \frac{sM(r_2 + sl_2)}{r_2 + sL_2} \quad (6.26)$$

$$\text{pois } L_2 = M + l_2 \quad (6.27)$$

A expressão Z_{eq} pode pôr-se noutra forma

$$Z_{eq}(s) = \frac{s l_1 (r_2 + s L_2) + s M r_2 + s^2 M l_2}{r_2 + s L_2}$$

$$Z_{eq}(s) = s \frac{l_1 \left(1 + s \frac{L_2}{r_2} \right) + M + s \frac{M l_2}{r_2}}{1 + s \frac{L_2}{r_2}} \quad (6.28)$$

Considerando a simplificação 6.29 e desprezando o termo $\frac{l_1}{M}$ face a 1,

$$M \approx L_2 \quad (6.29)$$

$$Z_{eq}(s) = s L_2 \frac{s \frac{l_1}{r_2} + 1 + s \frac{l_2}{r_2}}{1 + s \frac{L_2}{r_2}}$$

$$Z_{eq}(s) = s L_2 \left[\frac{1 + s \left(\frac{l_1}{r_2} + \frac{l_2}{r_2} \right)}{1 + s \tau_{20}} \right]$$

$$Z_{eq}(s) = s L_2 \frac{1 + s \tau_{cc}}{1 + s \tau_{20}} \quad (6.30)$$

onde:

$$\tau_{cc} = \frac{l_1 + l_2}{r_2} \quad \tau_{20} = \frac{L_2}{r_2} \quad (6.31)$$

A equação (6.30) traduz a variação de impedância equivalente vista do ponto P em função de frequência. A função $Z_{eq(s)}$ é a função de transferência que permite calcular a corrente em função da tensão. A função Z_{eq} representa a reactância operacional do transformador em curto circuito.

Pode definir-se uma indutância operacional de modo que:

$$Z_{eq(s)} = s L_{eq(s)} \quad L_{eq(s)} = L_2 \frac{1 + s \tau_{cc}}{1 + s \tau_{20}} \quad (6.32)$$

O diagrama de Bode de $L_{eq}(s)$ encontra-se representado na figura 6.9. O correspondente diagrama de Nyquist encontra-se na figura 6.10.

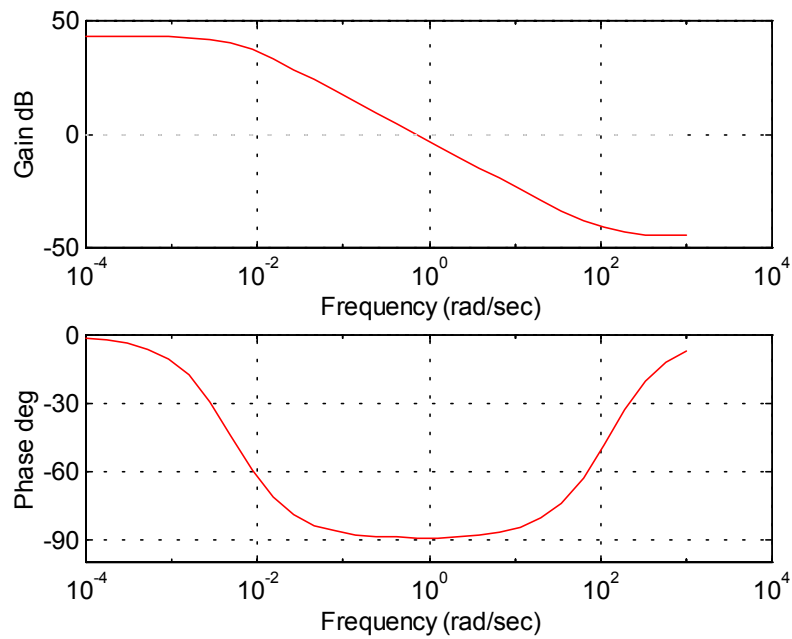


Figura 6.9. Diagrama de Bode.

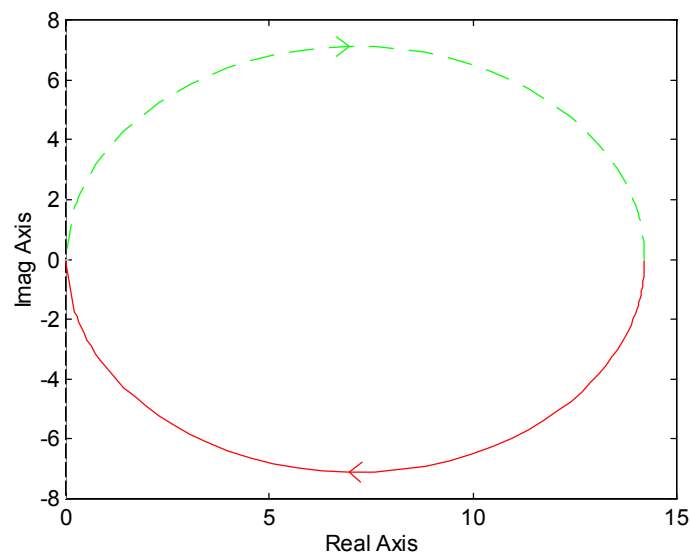


Figura 6.10. Representação no plano de Argand.

Exemplo 6.3

Calcular as constantes de tempo do transformador em curto-circuito.

Resolução

Das expressões 6.31 tem-se:

$$\tau_{cc}=0,0081 \text{ s} \quad \tau_{20}=19.75 \text{ s}$$

Transformador de intensidade de corrente

Considere-se o transformador em curto-circuito a funcionar como transformador de corrente. Importa saber a função de transferência que relaciona a corrente no secundário $I_{2(s)}$ com a corrente no primário $I_{1(s)}$.

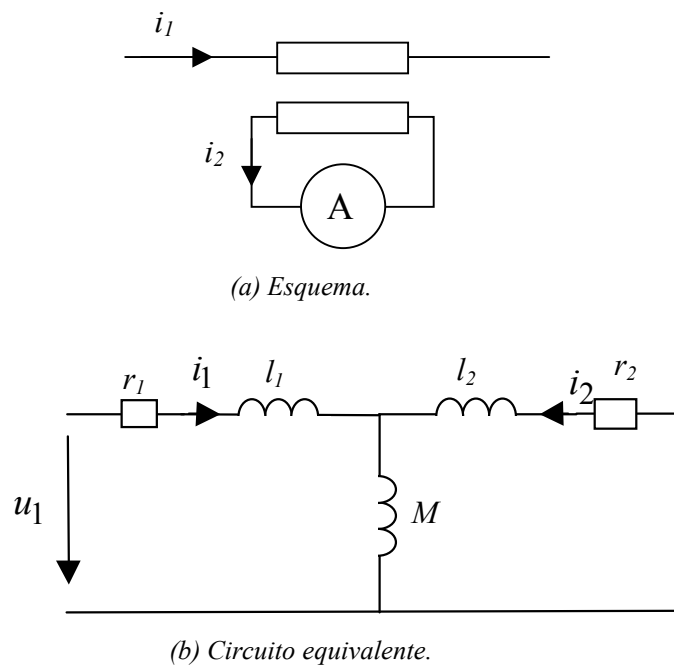


Figura 6.11. Transformador de intensidade.

Partindo do circuito equivalente da figura 6.11 tem-se:

$$I_2(s) = \frac{sM}{r_2 + s(M + l_2)} I_1(s) \quad (6.33)$$

o que é equivalente a:

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{sM / L_2}{\frac{r_2}{L_2} + s} = \frac{M}{L_2} \frac{s}{s + \frac{r_2}{L_2}} = \frac{M}{L_2} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_{20}}} \quad (6.34)$$

Esta função de transferência encontra-se representada na figura 6.12.

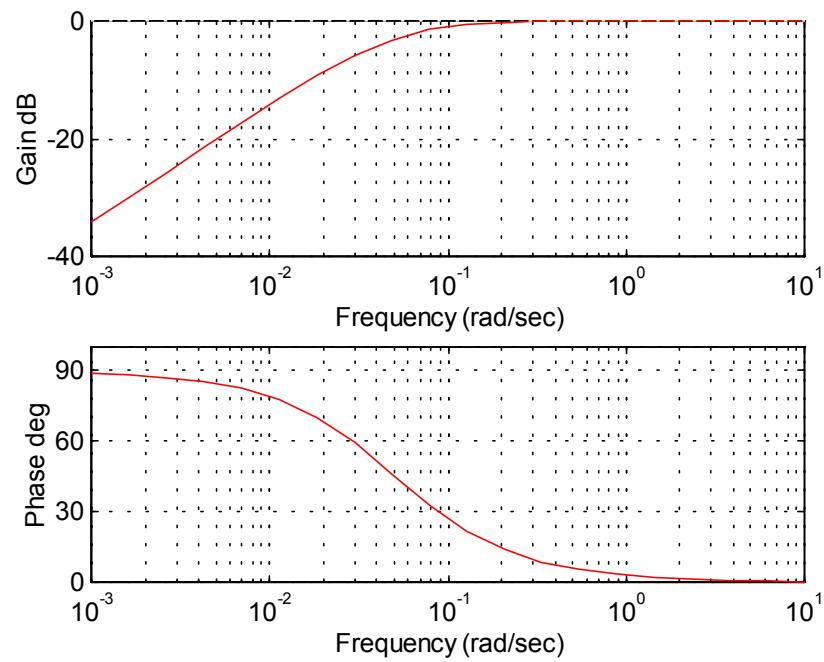


Figura 6.12. Característica do transformador de corrente.

Verifique-se que o transformador de corrente tem uma função de transferência plana para altas frequências (da ordem das dezenas e centenas de Hz. Para frequências muito mais elevadas há que considerar outros efeitos não considerados no modelo.

6.2 Transformador monofásico de 3 enrolamentos.

Equações

Considere-se o transformador de 3 enrolamentos representado na figura 6.13.

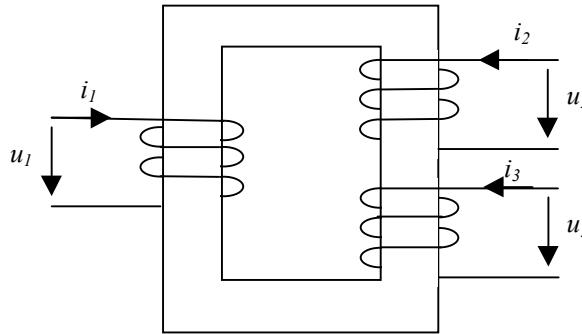


Figura 6.13. Transformador de 3 enrolamentos.

O modelo deste transformador será:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (6.35)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \quad (6.36)$$

$$u_3 = r_3 i_3 + \frac{d\psi_3}{dt} \quad (6.37)$$

A relação entre os fluxos e as correntes será dada pela matriz das impedâncias.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Substituindo as equações 6.38 em 6.35, 6.36 e 6.37 obtém-se um sistema de 3 equações diferenciais de coeficientes constantes. Pode aplicar-se a transformação de Laplace, obtendo-se :

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & L_{12}s & L_{13}s \\ L_{21}s & r_2 + L_{22}s & L_{23}s \\ L_{31}s & L_{32}s & r_3 + L_{33}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

A este sistema de equações pode fazer-se corresponder o esquema equivalente da figura 6.14.

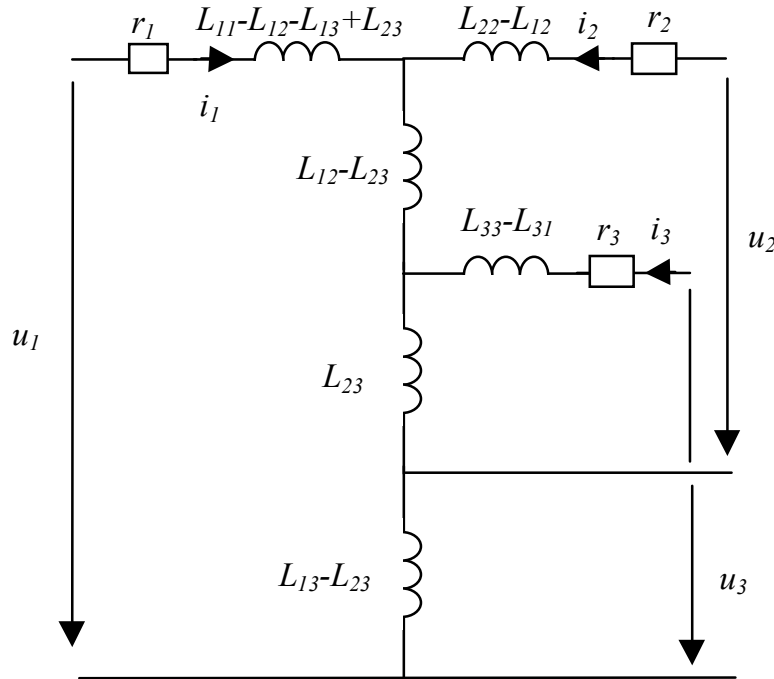


Figura 6.14. Circuito equivalente do transformador de 3 enrolamentos.

Se se aplicar a transformação :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

obtém-se para a matriz das impedâncias:

$$C^T ZC = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & k_2 L_{12}s & k_3 L_{13}s \\ k_2 L_{21}s & k_2^2 (r_2 + L_{22}s) & k_2 k_3 L_{23}s \\ k_3 L_{31}s & k_2 k_3 L_{32}s & k_3^2 (r_3 + L_{33}s) \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Em vez da matriz original 6.39, tem-se agora a matriz modificada 6.41. Estas matrizes representam a mesma realidade e são formalmente semelhantes. Apenas os

parâmetros são diferentes. Como k_2 e k_3 são arbitrários, os novos parâmetros terão agora valores que podemos escolher com dois graus de liberdade. O novo circuito equivalente será semelhante ao da figura 6.14. Naturalmente que os novos parâmetros são os que figuram na matriz da equação 6.41. É possível simplificar o circuito escolhendo valores de k_2 e k_3 convenientes. Fazendo:

$$k_2 = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{n_1}{n_3} \quad (6.42)$$

obtem-se o circuito equivalente reduzido. Este circuito também é semelhante ao da figura 6.14.

Esquema equivalente simplificado

O circuito equivalente pode ser simplificado se se adoptar:

$$k_2 = \frac{L_{13}}{L_{23}} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{L_{12}}{L_{23}} \quad (6.43)$$

que correspondem a valores próximos dos adoptados nas equações 6.42. A matriz das impedâncias será:

$$Z' = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & L_ms & L_ms \\ L_ms & \left(\frac{L_{13}}{L_{23}}\right)^2 (r_2 + L_{22}s) & L_ms \\ L_ms & L_ms & \left(\frac{L_{12}}{L_{23}}\right)^2 (r_3 + L_{33}s) \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

onde

$$L_m = \frac{L_{13}L_{12}}{L_{23}} \quad (6.45)$$

O circuito equivalente será:

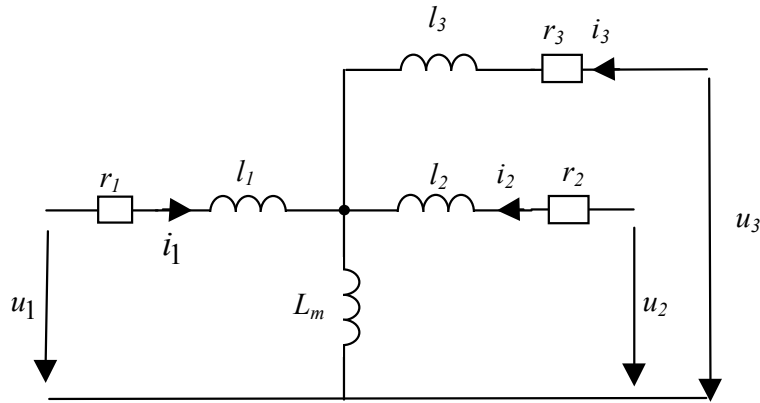


Figura 6.15. Circuito equivalente do transformador de 3 enrolamentos.

Onde

$$l_1 = L_{11} - L_m \quad (6.46)$$

$$l_2 = \left(\frac{L_{13}}{L_{23}} \right)^2 L_{22} - L_m \quad (6.47)$$

$$l_3 = \left(\frac{L_{12}}{L_{23}} \right)^2 L_{33} - L_m \quad (6.48)$$

O circuito equivalente da figura 6.15 resultou da escolha de k_2 e k_3 que anulam os dois ramos $L_{12}-L_{23}$ e $L_{13}-L_{23}$ do circuito da figura 6.14. Este é o circuito equivalente normalmente utilizado no estudo de transformadores de três enrolamentos.

Reactância Operacional de um transformador monofásico de 3 enrolamentos

É importante compreender-se o comportamento dinâmico dos transformadores pois o seu conhecimento é necessário em muitas situações, inclusivamente quando se estudam outras máquinas eléctricas como são os casos das máquinas síncronas e assíncronas. Com o objectivo de esclarecer alguns aspectos que serão utilizados no estudo da máquina síncrona em curto-circuito, vai-se introduzir o conceito de reactância operacional de um transformador com três enrolamentos.

Considere-se o secundário e o terciário em curto-circuito. Pretende saber-se qual a impedância equivalente vista do primário. O modelo será:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & L_{12}s & L_{13}s \\ L_{21}s & r_2 + L_{22}s & L_{23}s \\ L_{31}s & L_{32}s & r_3 + L_{33}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Fazendo uma partição como se indica na equação 6.49, o modelo pode escrever-se na forma condensada 6.50.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

resolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}X_1 + Z_{12}X_2 \\ 0 = Z_{21}X_1 + Z_{22}X_2 \end{cases} \begin{cases} U_1 = Z_{11}X_1 - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21}X_1 \\ X_2 = -Z_{22}^{-1}Z_{21}X_1 \end{cases} \quad (6.51)$$

Obtém-se:

$$U_1 = ZX_1 \quad (6.52)$$

com:

$$Z = Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} \quad (6.53)$$

A nova matriz Z será dada por:

$$Z = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & L_{12}s \\ L_{21}s & r_2 + L_{22}s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{13}s \\ L_{23}s \end{bmatrix} \frac{1}{r_3 + L_{33}s} [L_{31}s \quad L_{32}s] \quad (6.54)$$

$$Z = \begin{bmatrix} r_1 + L_{11}s & L_{12}s \\ L_{21}s & r_2 + L_{22}s \end{bmatrix} - \frac{1}{r_3 + L_{33}s} \begin{bmatrix} L_{13}L_{31}s^2 & L_{13}L_{32}s^2 \\ L_{23}L_{31}s^2 & L_{23}L_{32}s^2 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

ou seja:

$$Z = \begin{bmatrix} r_1 + \left(L_{11} - \frac{L_{31}L_{13}s}{r_3 + L_{33}s} \right) s & \left(L_{12} - \frac{L_{13}L_{32}s}{r_3 + L_{33}s} \right) s \\ \left(L_{21} - \frac{L_{23}L_{31}s}{r_3 + L_{33}s} \right) s & r_2 + \left(L_{22} - \frac{L_{23}L_{32}s}{r_3 + L_{33}s} \right) s \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Tendo em atenção que a matriz dos coeficientes de indução é simétrica e definindo as indutâncias operacionais transitórias,

$$L'_{11}(s) = L_{11} - \frac{L_{13}^2 s}{r_3 + L_{33}s} \quad (6.57)$$

$$L'_{22}(s) = L_{22} - \frac{L_{23}^2 s}{r_3 + L_{33}s} \quad (6.58)$$

$$M'(s) = L_{21} - \frac{L_{23}L_{31}s}{r_3 + L_{33}s} \quad (6.59)$$

obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + L'_{11}(s)s & M'(s)s \\ M'(s)s & r_2 + L'_{22}(s)s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

A equação 6.60 tem a mesma forma que a equação 6.49. Em vez das indutâncias constantes têm-se agora indutâncias operacionais transitórias dependentes de s . Pode voltar a aplicar-se a mesma técnica. Assim, tomando a segunda equação,

$$M'_{(s)} s I_1(s) + (r_2 + L'_{22}(s)s) I_2(s) = 0 \quad (6.61)$$

donde

$$I_2(s) = -\frac{M'_{(s)} s}{r_2 + L'_{22}(s)s} I_1(s) \quad (6.62)$$

e substituindo na primeira equação, obtém-se:

$$U_1(s) = \left(r_1 + L'_{11}(s)s - \frac{M'^2_{(s)}s^2}{r_2 + L'_{22}(s)s} \right) I_1(s) \quad (6.63)$$

Pode assim definir-se uma nova indutância operacional subtransitória,

$$L''_{11}(s) = L'_{11}(s) - \frac{M'^2_{(s)}s}{r_2 + L'_{22}(s)s} \quad (6.64)$$

A corrente do primário pode ser obtida por

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{r_1 + L''_{11}(s)s} \quad (6.65)$$

Expressões aproximadas para as indutâncias operacionais desprezando as resistências.

Quando se desprezam as resistências, as expressões, 6.57-59 simplificam-se dando origem a:

$$L'_{11}(s) = L_{11} - \frac{L_{13}^2}{L_{33}} = L_{11} \left(1 - \frac{L_{13}^2}{L_{33}L_{11}} \right) = \sigma_{13}L_{11} \quad (6.66)$$

$$L'_{22}(s) = L_{22} - \frac{L_{23}^2}{L_{33}} = L_{22} \left(1 - \frac{L_{23}^2}{L_{33}L_{11}} \right) = \sigma_{23}L_{22} \quad (6.67)$$

$$M'_{(s)} = L_{21} - \frac{L_{23}L_{31}}{L_{33}} = L_{21} \left(1 - \frac{L_{23}L_{31}}{L_{31}L_{33}} \right) = \sigma_{123}L_{21} \quad (6.68)$$

Estas funções degeneram assim em valores constantes. A indutância operacional subtransitória será:

$$L''_{11}(s) = \sigma_{13}L_{11} - \frac{\sigma_{123}^2 L_{21}^2}{\sigma_{23}L_{22}} \quad (6.69)$$

Estes são os valores que se obtêm das indutâncias operacionais quando a frequência tende para infinito.

6.3 Transformador trifásico de 3 colunas

Constituição

A figura 6.16 apresenta o esquema do transformador trifásico de 3 colunas. O primário é designado pelo índice p e o secundário pelo índice s .

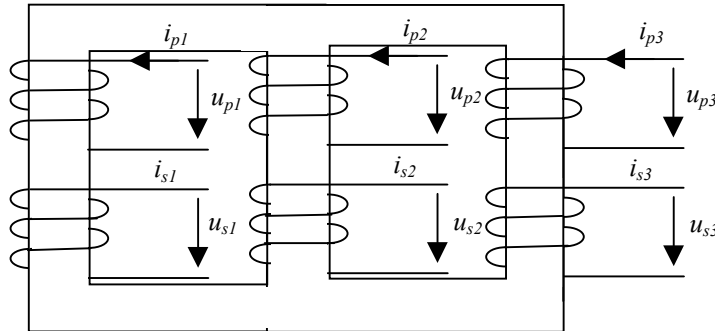


Figura 6.16. Transformador trifásico de três colunas.

Modelo matemático

O modelo do transformador trifásico de três colunas pode ser obtido recorrendo aos seus coeficientes de indução. Uma vez que não há movimento, apenas interessam as equações eléctricas que resultam da lei geral de indução. Embora haja uma ligeira assimetria da fase colocada na perna intermédia é frequente a não consideração desta assimetria e supor que se está a trabalhar com um transformador de núcleo magnético simétrico.

Transformador trifásico de núcleo magnético simétrico

A matriz dos coeficientes de indução de um transformador trifásico de núcleo simétrico tem simetria cíclica. Esta matriz está representada na equação 6.70.

$$L = \begin{bmatrix} L_{pp} & M_{pp} & M_{pp} & L_{ps} & M_{ps} & M_{ps} \\ M_{pp} & L_{pp} & M_{pp} & M_{ps} & L_{ps} & M_{ps} \\ M_{pp} & M_{pp} & L_{pp} & M_{ps} & M_{ps} & L_{ps} \\ \hline L_{ps} & M_{ps} & M_{ps} & L_{ss} & M_{ss} & M_{ss} \\ M_{ps} & L_{ps} & M_{ps} & M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \\ M_{ps} & M_{ps} & L_{ps} & M_{ss} & M_{ss} & L_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

Banco de três transformadores monofásicos

No caso de bancos trifásicos de transformadores monofásicos, não existe ligação magnética entre as diferentes fases. A matriz dos coeficientes de indução terá vários elementos com valor nulo equação, 6.71.

$$L = \begin{bmatrix} L_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} & 0 & 0 \\ 0 & L_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} & 0 \\ 0 & 0 & L_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} \\ \hline L_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Aplicação da transformação de Concordia ao transformador trifásico de núcleo magnético simétrico.

Aplicando a transformação de Concordia, e atendendo à simetria da matriz 6.70 e tendo em conta os resultados do capítulo 3, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} L_{pp} - M_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} - M_{ps} & 0 & 0 \\ 0 & L_{pp} - M_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} - M_{ps} & 0 \\ 0 & 0 & L_{pp} + 2M_{pp} & 0 & 0 & L_{ps} + 2M_{ps} \\ \hline L_{ps} - M_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} - M_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ps} - M_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} - M_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ps} + 2M_{ps} & 0 & 0 & L_{ss} + 2M_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Definindo:

$$L_p = L_{pp} - M_{pp} \qquad L_{op} = L_{pp} + 2M_{pp} \qquad (6.72)$$

$$L_s = L_{ss} - M_{ss} \qquad L_{os} = L_{ss} + 2M_{ss} \qquad (6.73)$$

$$M = L_{ps} - M_{ps} \qquad M_o = L_{ps} + 2M_{ps} \qquad (6.74)$$

obtém-se 3 esquemas equivalentes representados nas figuras 6.16 a 6.18. Verifica-se que o transformador tem um comportamento semelhante para as componentes α e β . Uma vez que o circuito equivalente é o mesmo. O comportamento em relação às componentes homopolares é diferente. Este comportamento também depende do tipo de ligações do primário e do secundário, estrela, triângulo, com ligação do ponto neutro ou sem ligação.

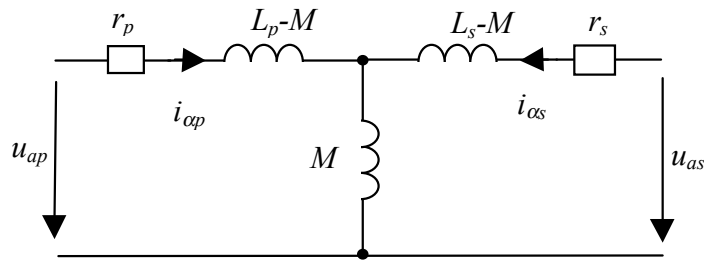


Figura 6.17. Circuito equivalente segundo α .

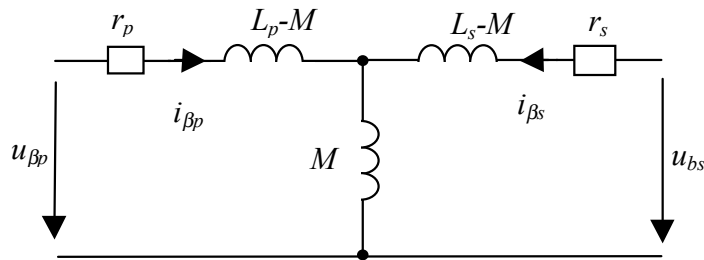


Figura 6.18. Circuito equivalente segundo β .

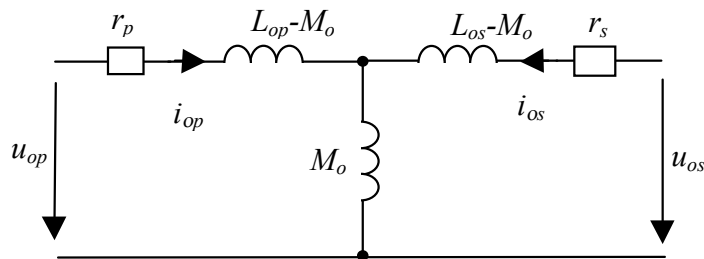


Figura 6.19. Circuito equivalente segundo o .

Exercícios

I

Considere um transformador trifásico com as seguintes características:

$S_N=100\text{kVA}$ $X_{cc}=8\%$ $R_{cc}=3\%$ $I_o=4\%$

- 1.1 Calcule o factor de dispersão deste transformador.
- 1.2 Fazendo as aproximações que achar necessárias e convenientes determine as várias constantes de tempo bem como os pólos e zeros das várias funções de transferência definidas neste capítulo.
- 1.3 Em função dos valores obtidos na alínea anterior, trace os diagramas de Bode que relacionam, em vazio, as tensões do secundário com as tensões do primário.
- 1.4 Trace o diagrama de Bode que relaciona, em curto-circuito, a corrente no secundário com a corrente no primário.

Anexo A6. Simulação do transformador em vazio considerando a saturação magnética.

O sistema representado na figura A6.1 serve para a simulação do transformador em vazio. A representação da saturação magnética é feita recorrendo à função $f[u]$ que representa a corrente de magnetização em função do fluxo. Foi usada uma função polinomial de terceira ordem.



Fig. A6.1. Simulação do transformador em vazio considerando a saturação magnética.

Capítulo 7

Regimes transitórios das Máquinas Síncronas

7.1 Introdução

Neste capítulo vai fazer-se a análise de alguns transitórios que podem ocorrer nas máquinas síncronas.

Para a resolução da maior parte dos problemas relacionados com o regime transitório das máquinas síncronas, as equações usadas são as de uma máquina síncrona com dois enrolamentos amortecedores, um segundo o eixo d e o outro segundo o eixo q . Embora seja apenas uma aproximação, os resultados obtidos são suficientemente aproximados para a maioria das aplicações. Por exemplo, os conceitos de reactância transitória e subtransitória, que serão vistos neste capítulo, dependem desta simplificação.

Tem-se verificado que o modelo descrito neste capítulo é suficientemente aproximado para o estudo das máquinas síncronas de pólos salientes utilizadas em centrais hidroeléctricas etc. A interpretação dos resultados obtidos nas máquinas de rotor maciço requer algum cuidado pois normalmente são necessários mais do que dois enrolamentos amortecedores para se obter uma aproximação razoável.

O objectivo principal deste capítulo consiste em leccionar conhecimentos que permitam a determinação dos transitórios usando simulação em computador por integração do modelo matemático obtido no capítulo 3. Para isso vai recorrer-se a um programa de simulação que se encontra descrito em anexo e que permite facilmente

obter a solução das equações diferenciais na generalidade das situações. Em alguns casos obtêm-se soluções analíticas aproximadas, que embora muito laboriosas, permitem uma boa interpretação dos resultados.

7.2 Modelo das Máquinas Síncronas com enrolamentos de excitação e enrolamentos amortecedores

Considere-se uma máquina síncrona de pólos salientes com dois enrolamentos amortecedores no rotor, um segundo a direcção transversal e o outro segundo a direcção longitudinal.

As suas equações, no referencial do rotor alinhado com a peça polar, cap 3, são:

$$u_d = r_s i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - p_p \omega_m \psi_q \quad (7.1a)$$

$$u_q = r_s i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + p_p \omega_m \psi_d \quad (7.1b)$$

$$u_o = r_o i_o + \frac{d\psi_o}{dt} \quad (7.1c)$$

$$u_f = r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (7.1d)$$

$$u_D = r_D i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \quad (7.1e)$$

$$u_Q = r_Q i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \quad (7.1f)$$

$$u_D = u_Q = 0 \quad (7.1g)$$

O binário, vem:

$$M_{em} = p_p (\vec{\psi}_s \times \vec{i}_s) = p_p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (7.2)$$

A estas equações é necessário introduzir as relações entre os fluxos e as correntes, isto é:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & M_{fd} & M_{dD} \\ M_{fd} & L_f & M_{fD} \\ M_{dD} & M_{fD} & L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\psi_o = L_o i_o \quad (7.5)$$

Os valores das indutâncias podem ser reduzidos com um factor arbitrário como se fez no caso do transformador. A forma mais simples é:

$$[L_d] = \begin{bmatrix} L_{md} + l_a & L_{md} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} + l_{kd} & L_{md} \\ L_{md} & L_{md} & L_{md} + l_f \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$[L_q] = \begin{bmatrix} L_{mq} + l_a & L_{mq} \\ L_{mq} & L_{mq} + l_{kq} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} L_d &= L_{md} + l_a \\ L_f &= L_{md} + l_f \\ L_D &= L_{md} + l_{kd} \\ L_q &= L_{mq} + l_a \\ L_Q &= L_{mq} + l_{kq} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Às equações 7.1, 7.6, 7.7 e 7.8 correspondem os esquemas equivalentes da figura 7.1 e 7.2.

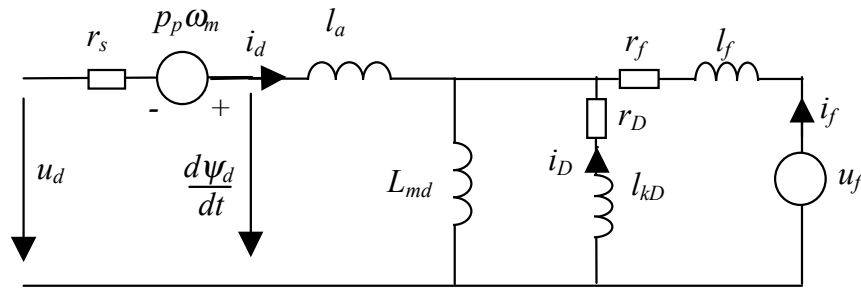


Figura 7.1 : Esquema equivalente segundo d.

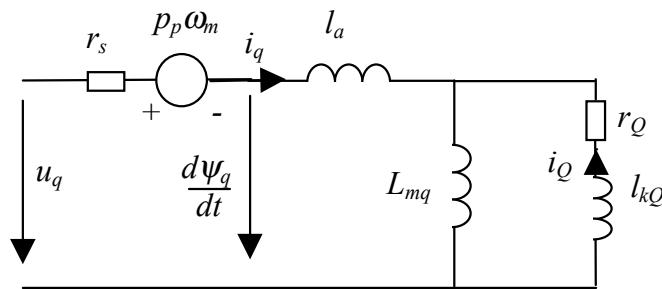


Figura 7.2. Esquema equivalente segundo q.

Estes esquemas equivalentes são semelhantes aos utilizados no estudo do transformador de 3 e 2 enrolamentos. A tensão aplicada é a tensão resultante do efeito transformador.

No anexo A encontra-se descrito o programa de simulação que se designou por “sindqfDQ”. Foi desenvolvido em ambiente MatLab/Simulink e utiliza as equações 7.1 a 7.4. Permite obter facilmente alguns transitórios mais usuais deste tipo de máquinas. Considera-se como entradas as tensões aplicadas à máquina e o binário de carga. Conhecendo estas grandezas o programa permite calcular o andamento das correntes, binário e velocidade.

Em muitas situações convém conhecer analiticamente o comportamento transitório destas máquinas. Este estudo pode ser feito quando a velocidade for constante pois as equações são equações lineares. Para tal faz-se uso da transformação de Laplace.

Aplicando a transformação de Laplace, e substituindo as expressões dos fluxos pelos produtos das matrizes das indutâncias pelas correntes, obtém-se :

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_f \\ u_D \\ u_q \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_d s & M_{fd} s & M_{dD} s & -\omega L_q & -\omega M_{qQ} \\ M_{fd} s & r_f + L_f s & M_{fD} s & 0 & 0 \\ M_{dD} s & M_{fD} s & r_D + L_D s & 0 & 0 \\ \hline \omega L_d & \omega M_{fd} & \omega M_{dD} & r_q + L_q s & M_{qQ} s \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} s & r_Q + L_Q s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Modelo da máquina em valores por unidade

Em valores por unidade, as reactâncias e as indutâncias têm o mesmo valor. No estudo das máquinas síncronas têm-se utilizado, por tradição, as designações das reactâncias em vez das indutâncias. No que se segue os valores dos coeficientes de indução foram substituídos pelos valores das reactâncias em valores por unidade.

O modelo da máquina síncrona é representado por um sistema de equações lineares. Para a sua resolução vai ser utilizada a técnica usual baseada na transformação de Laplace.

Em termos formais, a única diferença considerável é a substituição do termo $p_p \omega_m$ por ω , como já se fez nas equações 7.9.

Impedâncias operacionais

Reactâncias Operacionais da Máquina Síncrona

A transformação de Laplace é aplicada inicialmente às equações 7.1 a 7.8 ou aos circuitos das figuras 7.1 e 7.2.

Em muitos problemas, as correntes do circuito de excitação e dos enrolamentos amortecedores não são necessárias e podem ser eliminadas das equações utilizando processos análogos aos utilizados no estudo do transformador.

Isolando os termos de efeito transformador dos outros:

$$\begin{bmatrix} u_d + \omega \psi_q \\ u_f \\ 0 \\ u_q - \omega \psi_d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_d s & M_{fd} s & M_{dD} s & 0 & 0 \\ M_{fd} s & r_f + L_f s & M_{fD} s & 0 & 0 \\ M_{dD} s & M_{fD} s & r_D + L_D s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_q + L_q s & M_{qQ} s \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} s & r_Q + L_Q s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

As correntes dos enrolamentos amortecedores podem ser dadas pelas correntes do induzido e pela corrente de excitação. Utilizando as equações das linhas 3 e 5. Tem-se:

$$i_Q = -\frac{M_{qQ} s}{r_Q + L_Q s} i_q \quad (7.11)$$

$$i_D = -\frac{M_{dD} s}{r_D + L_D s} i_d - \frac{M_{fD} s}{r_D + L_D s} i_f \quad (7.12)$$

Eliminando a 3ª e 5ª equações e introduzindo os resultados de 7.11 e 7.12 em 7.10, tira-se:

$$\begin{bmatrix} u_d + \omega \psi_q \\ u_f \\ u_q - \omega \psi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_d s - \frac{M_{dD}^2 s^2}{r_D + L_D s} & M_{fd} s - \frac{M_{dD} M_{fD} s^2}{r_D + L_D s} & 0 \\ M_{fd} s - \frac{M_{dD} M_{fD} s^2}{r_D + L_D s} & r_f + L_f s - \frac{M_{fD}^2 s^2}{r_D + L_D s} & 0 \\ 0 & 0 & r_q + L_q s - \frac{M_{qQ}^2 s^2}{r_Q + L_Q s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_q \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
L'_d(s) &= L_d - \frac{M_{dD}^2 s}{r_D + L_D s} \\
L'_f(s) &= L_f - \frac{M_{fD}^2 s}{r_D + L_D s} \\
M_{fd}(s) &= M_{fd} - \frac{M_{dD} M_{fD} s}{r_D + L_D s} \\
L_q(s) &= L_q - \frac{M_{qQ}^2 s}{r_Q + L_Q s}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

As equações tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} u_d + \omega \psi_q \\ u_f \\ u_q - \omega \psi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L'_d(s)s & M'_{fd}(s)s & 0 \\ M'_{fd}(s)s & r_f + L'_f(s)s & 0 \\ 0 & 0 & r_s + L_q(s)s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_q \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

As equações 7.15 contêm a mesma informação que as equações originais que lhes deram origem (7.10). São uma forma condensada de representar o modelo da máquina síncrona. Tomando a segunda equação obtém-se:

$$i_f = \frac{u_f}{r_f + L'_f(s)s} - \frac{M_{fd}(s)s}{r_f + L'_f(s)s} i_d \tag{7.16}$$

Substituindo em 7.15 obtém-se uma forma ainda mais compacta:

$$\begin{bmatrix} u_d + \omega \psi_q \\ u_q - \omega \psi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L'_d(s)s - \frac{M_{fd}^2(s)s^2}{r_f + L'_f(s)s} & 0 \\ 0 & r_s + L_q(s)s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{M_{fd}(s)s}{r_f + L'_f(s)s} \\ 0 \end{bmatrix} u_f \tag{7.17}$$

Na equação 7.17 os termos da direita são as derivadas dos fluxos y_d e y_q á parte das quedas de tensão resistivas. Obtém-se uma matriz diagonal que relaciona os fluxos com as correntes nos eixos d e q. Pode representar-se este facto com o recurso a dois conceitos: o de reactância operacional segundo d e reactância operacional segundo q.

Assim, executando os cálculos obtém-se:

$$\psi_q(s) = \frac{X_q(s)}{\omega_o} I_q(s) \quad (7.18)$$

e

$$\psi_d(s) = \frac{X_d(s)}{\omega_o} I_d(s) + \frac{G(s)}{\omega_o} u_f(s) \quad (7.19)$$

Onde

$$X_d(s) = \omega_o L'_d(s) = \omega_o \left(L_d(s)s - \frac{M_{fd}^2 s^2}{r_D + L_D s} \right) \quad (7.20)$$

$$X_q(s) = \omega_o L_q(s) = \omega_o \left(L_q - \frac{M_{qQ}^2}{r_Q + L_Q s} \right) \quad (7.21)$$

$$G(s) = \omega_o \frac{M_{fd}(s)s}{r_f + L'_f(s)s} \quad (7.22)$$

O factor ω_o é introduzido apenas para que $X_{q(s)}$ e $X_{d(s)}$ tenham dimensões de uma reactância. As funções $X_{d(s)}$, $X_{q(s)}$ são funções de s , obtidas em cada caso como o cociente de dois determinantes, cada um dos quais, quando trabalhado, pode ser posto na forma de uma expressão polinomial em s . Após alguns cálculos laboriosos, obtém-se:

$$X_q(s) = X_q \frac{1 + s\tau_q''}{1 + s\tau_{qo}''} \quad (7.23)$$

$$X_d(s) = X_d \frac{(1 + s\tau_d')(1 + s\tau_d'')}{(1 + s\tau_{do}')(1 + s\tau_{do}'')} \quad (7.24)$$

$$G(s) = \frac{(1 + s\tau_{kd})}{(1 + s\tau_{do}')(1 + s\tau_{do}'')} \frac{X_{md}}{r_f} \quad (7.25)$$

Os valores das constantes de tempo estão definidos na secção seguinte.

Constantes de tempo da máquina síncrona:

As expressões 7.23 a 7.25 estão escritas em termos das constantes de tempo da máquina síncrona. Estas são definidas como:

Longitudinais

Transitória em circuito aberto

$$\tau'_{do} = \frac{x_f + X_{md}}{\omega_0 r_f} \quad (7.26)$$

Transitória em curto-circuito

$$\tau'_d = \frac{x_f + \frac{X_{md}x_a}{X_{md} + x_a}}{\omega_0 r_f} \quad (7.27)$$

Subtransitória em vazio

$$\tau''_{do} = \frac{1}{\omega_0 r_D} \left(x_{kd} + \frac{X_{md}x_f}{X_{md} + x_f} \right) \quad (7.28)$$

Subtransitória em curto-circuito

$$\tau''_d = \frac{1}{\omega_0 r_D} \left(x_{kd} + \frac{X_{md}x_ax_f}{X_{md}x_a + X_{md}x_f + x_ax_f} \right) \quad (7.29)$$

Transversais

Subtransitória em vazio

$$\tau_{qo}'' = \frac{1}{\omega_0 r_Q} (x_{kq} + X_{mq}) \quad (7.30)$$

Subtransitória em curto-circuito

$$\tau_q'' = \frac{1}{\omega_0 r_Q} \left(x_{kq} + \frac{X_{mq} x_a}{X_{mq} + x_a} \right) \quad (7.31)$$

Dispersão dos amortecedores

$$\tau_{kd} = \frac{x_{kd}}{\omega_0 r_D} \quad (7.32)$$

As constantes de tempo são divididas por ω_0 pois estão expressas em segundos e utilizam valores das reactâncias e resistências em valores por unidade. Para serem postas em valores por unidade devem ser divididas pelo valor de base de tempo.

$$T_b = \frac{1}{\omega_0} \quad (7.33)$$

Durante o regime permanente, quando todas as variáveis relativas aos dois eixos forem constantes, tem-se $s=0$, e de acordo com as expressões 7.12, 7.13 e 7.14, tem-se:

$$X_d(s) = X_d \quad (7.34)$$

$$X_q(s) = X_q \quad (7.35)$$

$$G(s) = \frac{X_{md}}{r_f} \quad (7.36)$$

Durante os transitórios rápidos s tende para infinito e os valores limite serão:

$$X_d(\infty) = X_d'' = X_d \frac{\tau_d' \tau_d''}{\tau_{do}' \tau_{do}''} \quad (7.37)$$

$$X_q(\infty) = X_q'' = X_q \frac{\tau_q''}{\tau_{qo}} \quad (7.38)$$

$$G(\infty) = 0 \quad (7.39)$$

Na ausência de enrolamentos amortecedores, ou na situação em que os transitórios rápidos já se tenham extinguido, tem-se:

$$X_d(s) = X_d' = X_d \frac{\tau_d'}{\tau_{do}} \quad (7.40)$$

$$X_q(s) = X_q' = X_q \quad (7.41)$$

$$G(s) = \frac{1 + s\tau_{kd}}{1 + s\tau_{do}} \frac{X_{md}}{r_f} \quad (7.42)$$

As tabelas 7.1 a 7.2 apresentam os valores típicos das constantes de tempo e das reactâncias síncrona, transitória e subtransitória das máquinas síncronas. Uma das vantagens de se trabalhar em valores por unidade é o facto de se obterem valores que, expressos em *pu*, variam pouco com a potência das máquinas. Isto é evidente nas tabelas acima referidas.

Estes valores são normalmente tabelados e existem normas que especificam os valores a utilizar nos cálculos.

Tabela 7.1 Constantes de tempo típicas das máquinas síncronas em segundos

Constantes de tempo	Turbogeradores			Geradores Hidráulicos			Condensadores Síncronos		
	Baixo	Médio	Alto	Baixo	Médio	Alto	Baixo	Médio	Alto
τ_{do}'	2.8	5.6	9.2	1.5	5.6	9.5	6.0	9.0	11.5
τ_d'	0.4	1.1	1.8	0.5	1.8	3.3	1.2	2.0	2.8
$\tau_{d}'' = \tau_q''$	0.02	0.035	0.05	0.01	0.035	0.05	0.02	0.035	0.05
τ_a'	0.04	0.16	0.35	0.3	0.15	0.25	0.10	0.17	0.3

Tabela 7.2 Características típicas de turbogeradores e de compensadores síncronos

Parâmetros	Geradores		Compensadores Síncronos	
	Gama	Valor recomendado	Gama	Valor recomendado
Potência nominal	300-1000MW	...	50-100MVA	
Reactância síncrona x_d	1.4-1.8	1.6	1.7-2.7	2.2
Reactância transitória x'_d	0.23-0.35	0.25	0.45-0.65	0.55
Reactância subtransitória x''_d	0.15-0.23	0.2	0.35-0.45	0.4
Reactância síncrona x_q	1.5-1.6	1.55	1-1.3	1.15
Reactância de sequência negativa	0.18-0.2	0.19	0.35-0.45	0.4
Reactância de sequência nula	0.12-0.14	0.13	0.15-0.25	0.2
Razão de curto-circuito	0.5-0.7	0.64	0.35-0.65	0.5
Constante de inércia H (s)	3-8	4-6

Admitâncias operacionais

Podem definir-se admitâncias operacionais da forma:

$$Y_d(s) = \frac{1}{X_d(s)} = \frac{(1 + s\tau'_{do})(1 + s\tau''_{do})}{(1 + s\tau'_d)(1 + s\tau''_d)} Y_d \quad (7.43)$$

$$Y_q(s) = \frac{1}{X_q(s)} = \left(\frac{1 + s\tau''_{qo}}{1 + s\tau''_q} \right) Y_q \quad (7.44)$$

A admitância operacional directa pode ser expandida em fracções parciais:

$$Y_d(s) = \frac{1}{X_d} \left(1 + \frac{As}{1 + s\tau'_d} + \frac{Bs}{1 + s\tau''_d} \right) \quad (7.45)$$

Calculando A e B, obtém-se:

$$A = - \frac{\tau_d' \left(1 - \frac{\tau_{do}'}{\tau_d'} \right) \left(1 - \frac{\tau_{do}''}{\tau_d''} \right)}{\left(1 - \frac{\tau_d''}{\tau_d'} \right)} \quad (7.46)$$

$$B = - \frac{\tau_d'' \left(1 - \frac{\tau_{do}'}{\tau_d''} \right) \left(1 - \frac{\tau_{do}''}{\tau_d''} \right)}{\left(1 - \frac{\tau_d'}{\tau_d''} \right)} \quad (7.47)$$

Como τ_d'' e τ_{do}'' tomam valores pequenos comparados com τ_d' e τ_{do}' obtém-se aproximadamente:

$$Y_d(s) = \frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{s\tau_d'}{1 + s\tau_d'} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) \frac{s\tau_d''}{1 + s\tau_d''} \quad (7.48)$$

As fracções parciais de $Y_d(s)$ podem ser consideradas como aplicadas a um circuito equivalente longitudinal que tem três circuitos em paralelo e independentes. A cada um desses ramos corresponde um termo da equação 7.48.

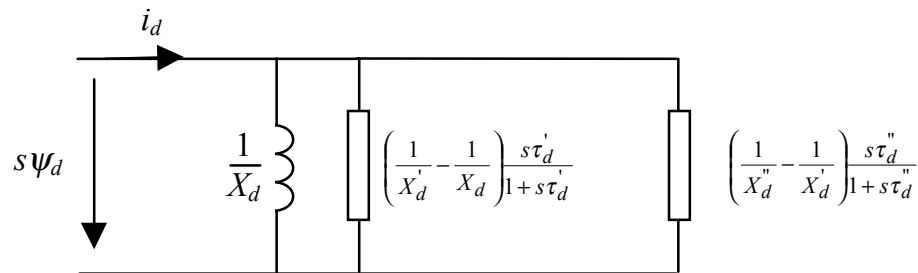


Figura 7.3. Esquema equivalente segundo d .

A admitância segundo o eixo q , executando os cálculos que são análogos aos do eixo d , virá:

$$Y_q(s) = \frac{1}{X_q} + \left(\frac{1}{X_q''} - \frac{1}{X_q} \right) \frac{\tau_q'' s}{(1 + s\tau_q'')} \quad (7.49)$$

Diagramas de Bode e de Nyquist.

As admitâncias operacionais e as reactâncias operacionais podem representar-se em termos de frequência por diagramas de Bode ou de Nyquist substituindo s por $j\omega$. Os diagramas de Bode das reactâncias operacionais estão representados nas figuras 7.4 e 7.5. Os diagramas de Nyquist das admitâncias operacionais encontram-se representados nas figuras 7.6 e 7.7.

Analisando a figura 7.4 pode verificar-se a existência de três zonas bem definidas. Abaixo de 0.1 rad/s a amplitude de $X_d(\omega)$ é constante e igual ao valor de X_d . Acima de 0.1 rad/s esta amplitude começa a reduzir-se apresentando numa gama entre 1 e 10 rad/s um valor sensivelmente igual a X_d' . Acima de 10 rad/s o valor desta amplitude volta a diminuir, estabilizando acima de 100 rad/s num valor igual a X_d'' .

A reactância operacional transversal tem um andamento mais simples. Nos dois primeiros troços atrás referidos mantêm-se constante e igual a X_q . Começa a reduzir-se para frequências próximas de 10 rad/s e estabiliza no valor igual a X_q'' para frequências superiores a 100 rad/s .

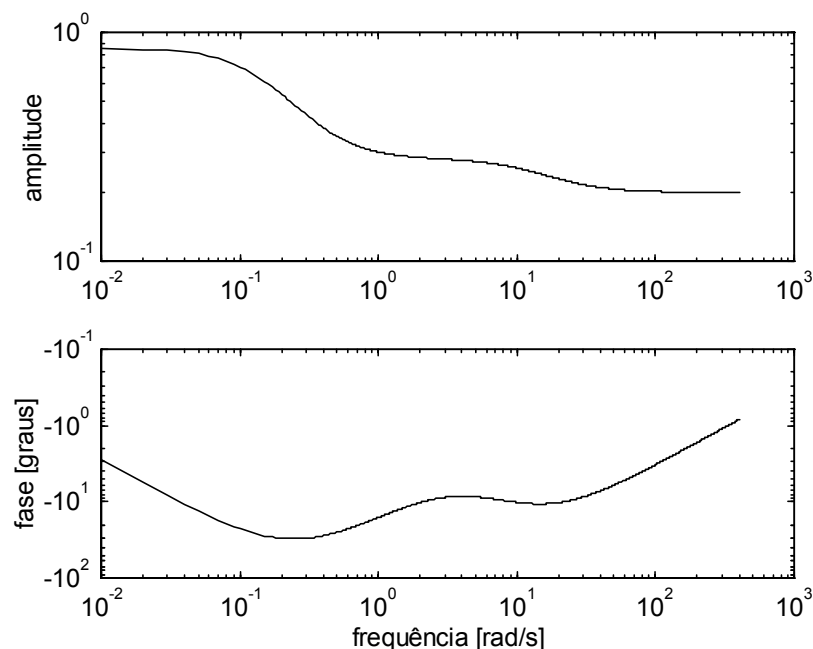


Figura 7.4. Reactância operacional segundo d .

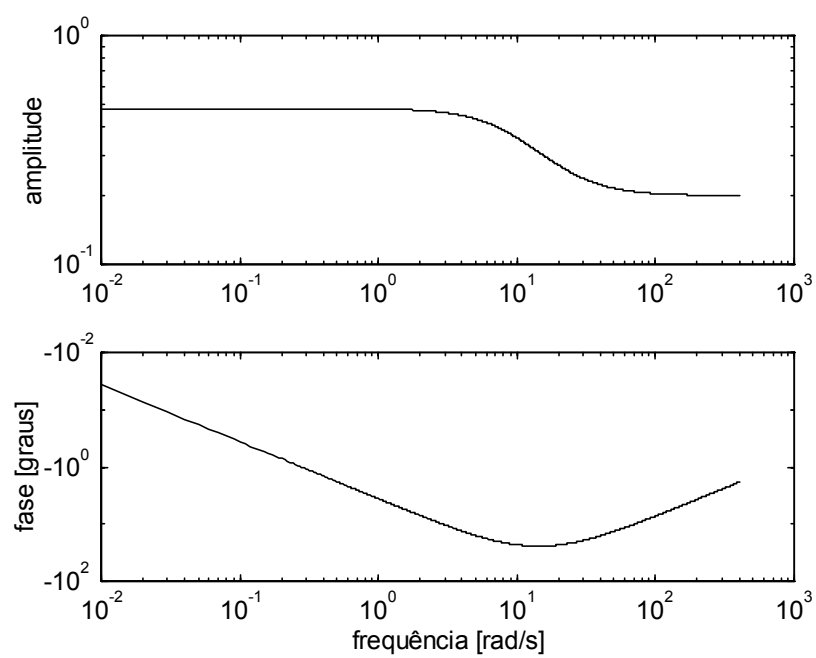


Figura 7.5. Reactância operacional segundo q .

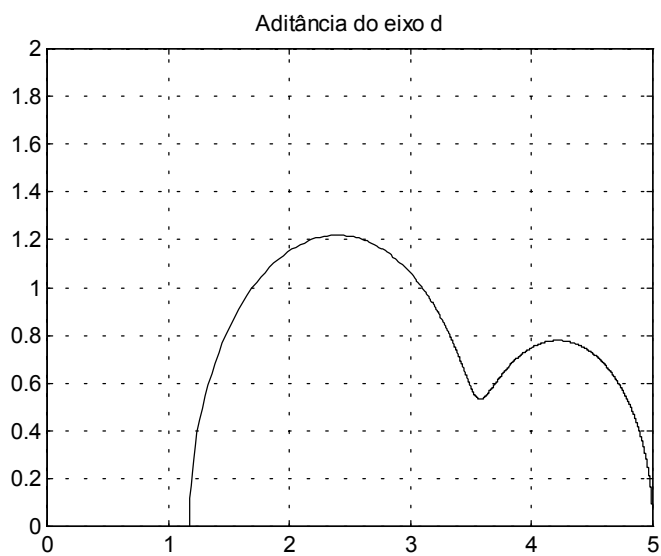


Figura 7.6. Admitância operacional segundo d .

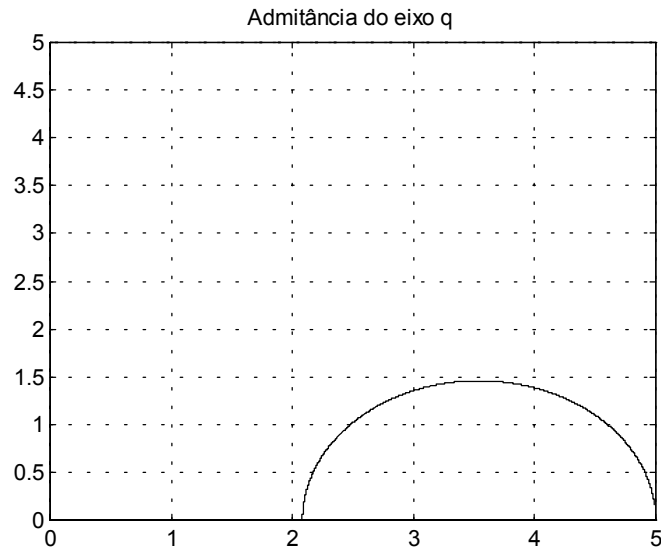


Figura 7.7. Admitância operacional segundo q .

Na figura 7.8 representa-se o diagrama de Bode da função de transferência $G(s)$.

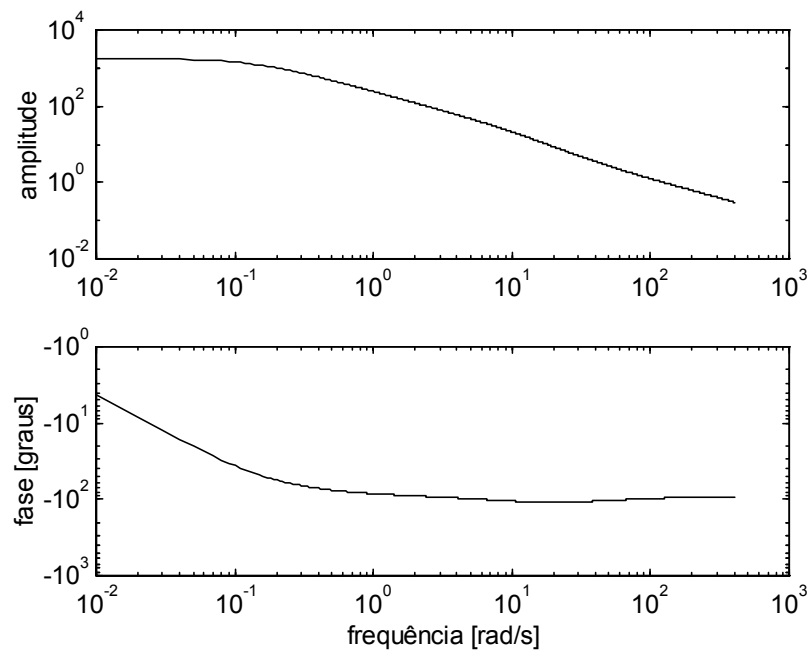


Figura 7.8. Função de transferência $G(s)$.

Exemplo 7.1

Considere uma máquina síncrona de pólos salientes de $S=325\text{MVA}$, 20kV , $p=32$, 50Hz , com os seguintes parâmetros dados em valores por unidade.

$$\begin{aligned}
 r_s &= .0019 & r_f &= .00041 & r_D &= .0141 & L_d &= .85 \\
 l_a &= .12 & L_{md} &= L_d - L_a & l_{kd} &= .16 & l_f &= .2049 \\
 r_Q &= .0136 & L_Q &= .48 & L_{mq} &= L_Q - l_a & l_{kQ} &= .1029 \\
 H &= 7.5s
 \end{aligned}$$

Calcule as constantes de tempo em segundos e os valores das reactâncias transitórias e subtransitórias.

Solução:

Constantes do tempo

$$\tau_{do}' = 7.2582$$

$$\tau_d' = 2.3909$$

$$\tau_{do}'' = 0.0722$$

$$\tau_d'' = 0.0516$$

$$\tau_{qo}'' = 0.108$$

$$\tau_q'' = 0.0451$$

$$\tau_{kd} = 0.0361$$

Reactâncias

$$X_d' = 0.2800$$

$$X_d'' = 0.2000$$

$$X_q'' = 0.2000$$

7.3 Curto-circuito trifásico simétrico e equilibrado a partir do vazio

Embora a maioria dos defeitos que ocorrem em sistemas de energia eléctrica sejam do tipo assimétrico e desequilibrado, o estudo do curto-circuito trifásico simétrico e equilibrado reveste-se de algum interesse porque, embora raro, é mais fácil de analisar analiticamente e constitui uma situação de partida para os estudos de defeitos assimétricos.

A análise que se segue faz o estudo analítico do curto-circuito de uma máquina síncrona partindo da condição de vazio. Este estudo pode ser estendido posteriormente à condição de carga. O estudo é feito na condição simplificativa de que a velocidade de rotação se mantém constante. Nesta situação as equações são lineares podendo para a sua solução ser usado o princípio da sobreposição e as transformações de Laplace.

Condições iniciais

Estando as máquinas em vazio e em regime permanente com tensão nominal nos terminais, tem-se:

$$u_f = r_f i_f \quad (7.50a)$$

$$u_{do} = -\omega \psi_q \quad u_{qo} = \omega \psi_d \quad (7.50b)$$

$$\psi_{do} = L_{md} i_{fo} \quad (7.50c)$$

$$i_d = i_q = i_D = i_Q = 0 \quad (7.50d)$$

Como:

$$\psi_q = L_q i_q + M_{qQ} i_Q = 0 \quad (7.51)$$

tem-se:

$$U_{do} = 0 \quad U_{qo} = U_m = \sqrt{3}U \quad (7.52a)$$

$$\psi_{do} = U_m / \omega_0 \quad (7.52b)$$

$$i_{fo} = \psi_{do} / L_{md} \quad (7.52c)$$

$$u_{fo} = r_f i_{fo} \quad (7.52d)$$

$$\psi_{fo} = (L_{md} + l_f) i_{fo} \quad (7.52e)$$

$$\psi_{Do} = (L_{md} + l_{fk}) i_{fo} \quad (7.52f)$$

$$\psi_{Q0} = \psi_{q0} = 0 \quad (7.52g)$$

Equações operacionais

As equações da máquina síncrona são lineares nas condições que se estão a considerar. Assim são também válidas para as variações das suas grandezas.

$$i = i_o + \otimes i \quad u = u_o + \ddot{A} u \quad \psi = \psi_o + \ddot{A} \psi \quad \text{etc.} \quad (7.53)$$

Como as correntes são nulas no instante inicial, as grandezas depois do instante inicial do transitório serão também iguais às suas variações. Na análise que se segue, com o objectivo de simplificar a notação, utilizam-se os mesmos símbolos para as variações e para as grandezas uma vez que neste caso elas são iguais com excepção de algumas grandezas. Esta situação será vista mais à frente.

Deve notar-se que aplicar um curto-circuito é anular as tensões aos terminais. Como $u_{do} = 0$, neste transitório vai anular-se a tensão u_q . Tudo se passa como se se aplicasse um escalão de $u_q = -U_{qo} = -U_m$ no instante do curto-circuito. As equações serão, em termos de transformação de Laplace:

$$0 = \left[r_s + s \frac{X_d(s)}{\omega_o} \right] I_d(s) - X_q(s) I_q(s) \quad (7.54)$$

$$-\frac{U_m}{s} = X_d(s) I_d(s) + \left[r_s + s \frac{X_q(s)}{\omega_o} \right] I_q(s) \quad (7.55)$$

Não aparece nenhum termo relativamente a $G(s)U_f(s)$ pois, por hipótese, u_f mantém-se constante durante o transitório e em termos de variação $\otimes u_f = 0$.

Na forma matricial, considerando as equações 7.17 a 7.21, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_m}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + \frac{sX_d(s)}{\omega_o} & -X_q(s) \\ X_d(s) & r_s + \frac{sX_q(s)}{\omega_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_q(s) \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

Solução das equações:

Cálculo das correntes

As funções $I_d(s)$ e $I_q(s)$ são obtidas resolvendo o sistema de equações 7.56.

$$I_d(s) = -\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2 + s\omega_0 r_s \left(\frac{1}{X_d(s)} + \frac{1}{X_q(s)} \right) + \frac{\omega_0^2 r_s^2}{X_d(s)X_q(s)}} \frac{1}{X_d(s)} \frac{U_m}{s} \quad (7.57a)$$

$$I_q(s) = -\frac{\omega_0^2 \left(r_s + s \frac{X_d(s)}{\omega_0} \right)}{s^2 + \omega_0^2 + s\omega_0 r_s \left(\frac{1}{X_d(s)} + \frac{1}{X_q(s)} \right) + \frac{\omega_0^2 r_s^2}{X_d(s)X_q(s)}} \frac{1}{X_d(s)X_q(s)} \frac{U_m}{s} \quad (7.57b)$$

Estas equações estão escritas em termos das reactâncias e admitâncias operacionais. O denominador pode ser simplificado tendo em conta que r_s é pequeno. O termo r_s^2 pode ser completamente desprezado e nos termos em r_s , $X_d(s)$ e $X_q(s)$ podem ser simplificados desprezando as resistências r_f , r_D e r_Q . Isto é equivalente a substituir neste termo todos os factores da forma $(1 + s\tau)$ por $s\tau$. Com esta aproximação $X_d(s)$ e $X_q(s)$ reduzem-se às reactâncias subtransitórias X_d'' e X_q'' . Então:

$$I_d(s) = \frac{-\omega_0^2}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)} \frac{U_m}{X_d(s)} \quad (7.58a)$$

$$I_q(s) = \frac{-\omega_0}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)} \frac{U_m}{X_q(s)} \quad (7.58b)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\omega_0 r_s}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) = \frac{1}{\tau_a} \quad (7.59)$$

A expansão em fracções parciais de $1/X_d(s)$ pode ser substituída na expressão 7.59, obtendo-se:

$$I_d(s) = \frac{-\omega_0^2}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{s\tau_d'}{(1 + \tau_d' s)} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) \frac{s\tau_d''}{(1 + s\tau_d'')} \right] \frac{U_m}{s} \quad (7.60)$$

Do mesmo modo, desprezando r_s obtém-se para a componente em quadratura:

$$I_q(s) = \frac{-s\omega_0}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)} \left[\frac{1}{X_q} + \left(\frac{1}{X_q''} - \frac{1}{X_q} \right) \frac{\tau_q'' s}{1 + s\tau_q''} \right] \frac{U_m}{s} \quad (7.61)$$

Aplicando a transformação de Laplace inversa,

$$i_d = -U_m \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/\tau_d'} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) e^{-t/\tau_d''} \right] + U_m \frac{e^{-\alpha t}}{X_d''} \cos(\omega_0 t) \quad (7.62)$$

$$i_q = -U_m \frac{e^{-\alpha t}}{X_q''} \sin(\omega_0 t) \quad (7.63)$$

O andamento no tempo das correntes i_d e i_q encontra-se representado nas figuras 7.9 e 7.10. Para se facilitar a análise dos termos das equações 7.62 e 7.63 estas figuras estão traçadas com escalas de tempo diferentes. Note-se que os transitórios segundo q são extintos mais rapidamente do que segundo d . Por outro lado, o valor final de i_d é um

valor negativo não nulo enquanto que segundo i_q este valor é nulo. A influência das constantes de tempo τ'_d e τ''_d só se exerce sobre as correntes segundo o eixo d .

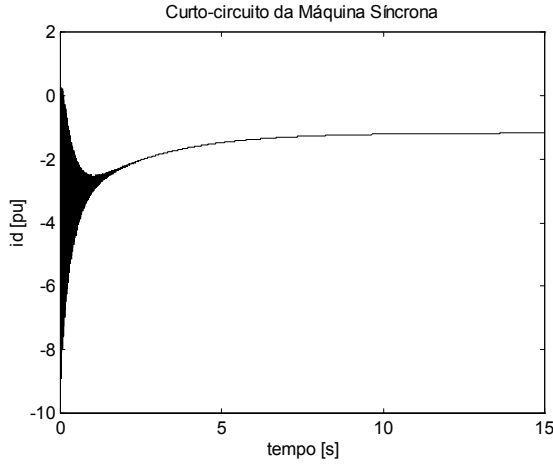


Figura 7.9. Corrente segundo d .

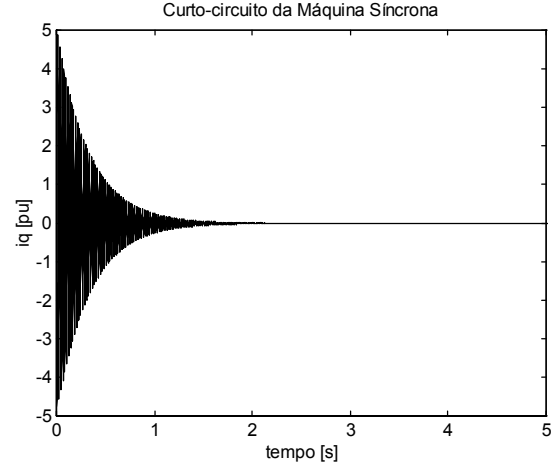


Figura 7.10. Corrente em quadratura

As correntes nas fases serão obtidas aplicando a transformação de Park com um ângulo de transformação $\theta = \omega_o t + \theta_o$. O ângulo θ_o representa a posição do rotor relativamente ao eixo da fase a no instante do curto-circuito.

$$\begin{aligned}
 i_a = & -\sqrt{2}U \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/\tau'_d} + \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-t/\tau''_d} \right] \cos(\omega_o t + \theta_o) \\
 & + \frac{\sqrt{2}U}{2} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right) e^{-\alpha t} \cos(\theta_o) \\
 & + \frac{\sqrt{2}U}{2} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right) e^{-\alpha t} \cos(2\omega_o t + \theta_o)
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Os valores de i_b e i_c podem ser obtidos substituindo θ_o por $(\theta_o - 2\pi/3)$ e $(\theta_o - 4\pi/3)$ respectivamente.

As próximas figuras mostram o andamento das correntes de fase. Na figura 7.11 estão representadas as correntes nas 3 fases nos 3 primeiros segundos onde $\theta_o = \pi/2$. Note-se que só existem componentes contínuas nas fases b e c . Isto resultou do instante inicial escolhido.

A figura 7.12 mostra o andamento da corrente i_a durante um período de tempo alargado. Note-se que mesmo no instante $t=9s$ o transitório ainda não está completamente extinto.

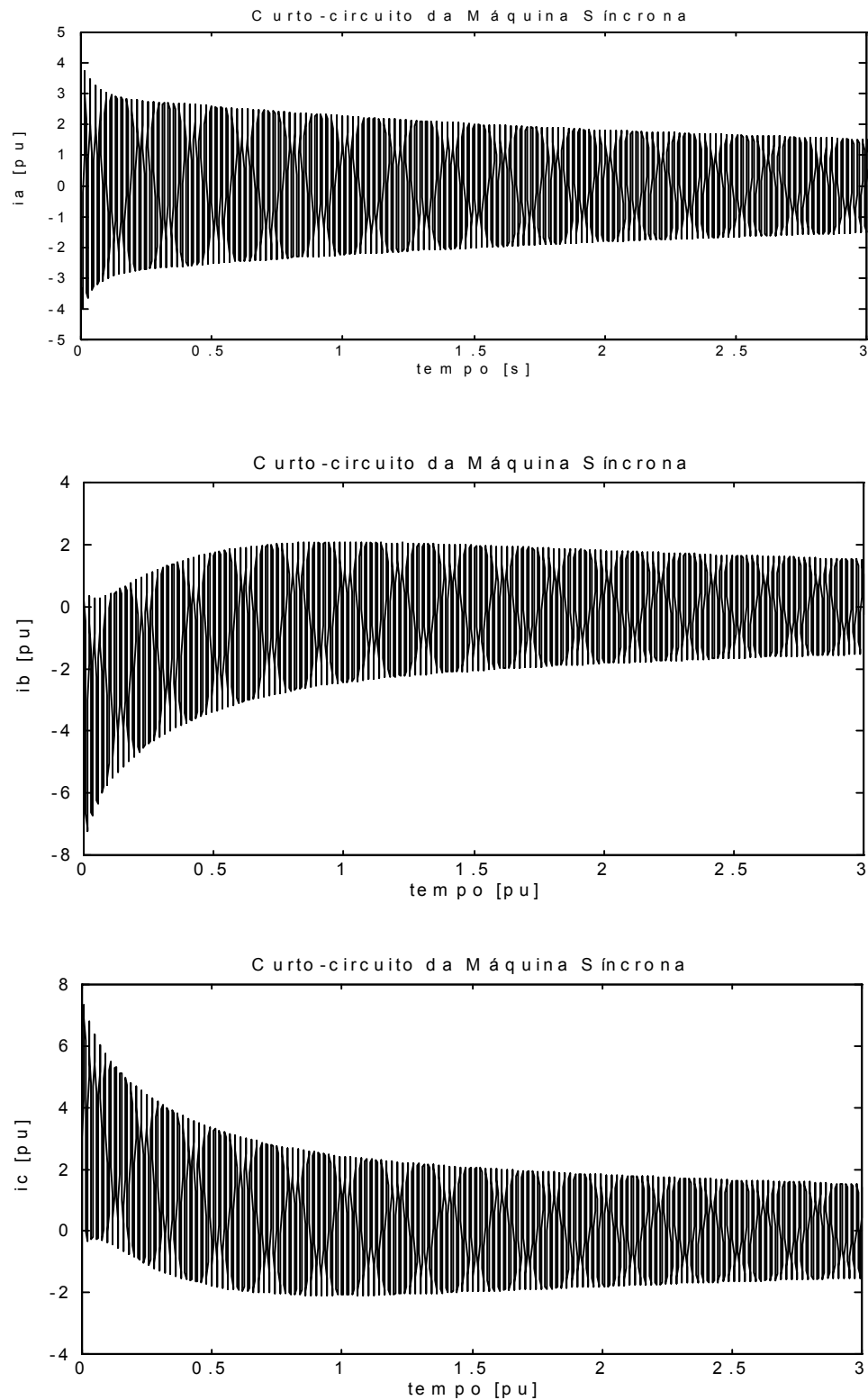


Figura 7.11. Correntes nas 3 fases nos 3 primeiros segundos.

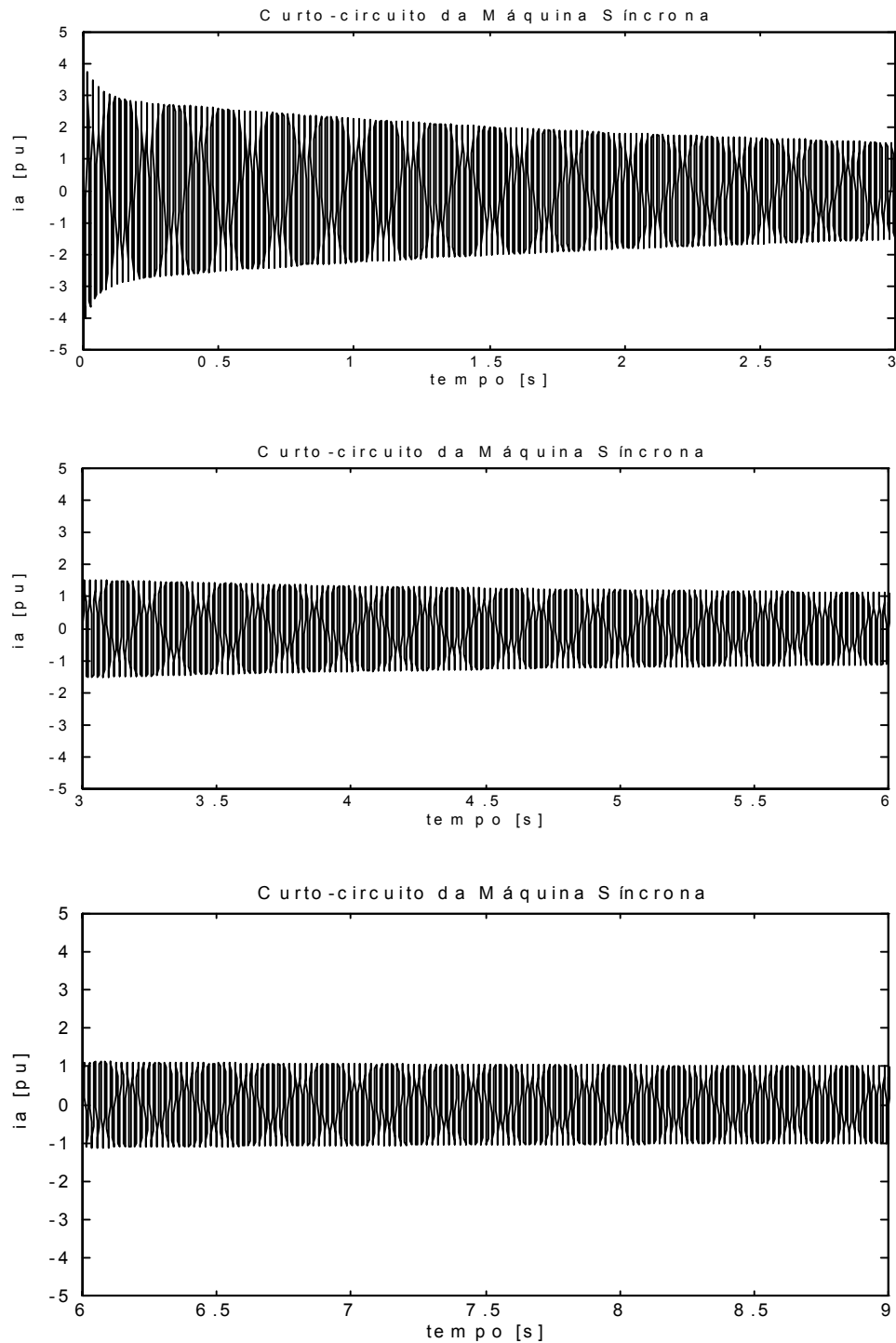


Figura 7.12. Correntes na fase a nos 9 primeiros segundos.

No transitório da figura 7.12 não existe componente contínua. Esta componente depende do instante em que se faz o curto-circuito. Neste exemplo foi escolhido um instante a que corresponde um valor nulo de componente contínua na fase a . Note-se

que esta componente existe sempre em pelo menos duas fases pois existem 3 fases e apenas é possível que ela se anule numa das 3 fases.

Nos primeiros instantes, correspondendo a um ciclo ou dois da rede, existe um transitório que se anula rapidamente. Depois existe um transitório que se anula num intervalo de tempo muito mais longo. Aos primeiros instantes dá-se o nome de regime subtransitório e a seguir a designação de regime transitório. Finalmente atinge-se o regime permanente (não mostrado na figura).

Cálculo dos fluxos

Os fluxos são decompostos em:

$$\psi_d = \psi_{d0} + \otimes \psi_d \quad (7.65a)$$

$$\psi_q = \psi_{q0} + \ddot{\Delta} \psi_q \quad (7.65b)$$

Tendo em conta as expressões que $I_d(s)$ e $I_q(s)$ calculadas atrás 7.60 e 7.61, tem-se:

$$\ddot{\Delta} \psi_d = \frac{X_d(s)}{\omega_0} I_d(s) = \frac{-\omega_0}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \frac{U_m}{s} \quad (7.66)$$

$$\ddot{\Delta} \psi_q = \frac{X_q(s)}{\omega_0} I_q(s) = \frac{-s\omega_0}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \frac{U_m}{s} \quad (7.67)$$

Aplicando a transformação de Laplace inversa, obtém-se:

$$\ddot{\Delta} \psi_d = -\frac{U_m}{\omega_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_a}} \cos \omega_o t \right) \quad (7.68)$$

$$\ddot{\Delta} \psi_q = -\frac{U_m}{\omega_o} e^{-\frac{t}{\tau_a}} \sin \omega_o t \quad (7.69)$$

Tendo em conta os valores iniciais, tem-se:

$$\psi_d = \frac{U_m}{\omega_o} e^{-\frac{t}{\tau_a}} \cos(\omega_o t) \quad (7.70)$$

$$\psi_q = -\frac{U_m}{\omega_o} e^{-\frac{t}{\tau_a}} \sin(\omega_o t) \quad (7.71)$$

Estes dois fluxos combinam-se e formam um campo girante que roda no sentido negativo à velocidade ω_o e portanto é estacionário relativamente ao estator. A sua amplitude diminui com a constante do induzido τ_a (eq. 7.48) que depende da resistência do induzido, fig 7.15.

A representação do andamento temporal dos fluxos segundo d e segundo q encontra-se representada nas figuras 7.13 e 7.14.

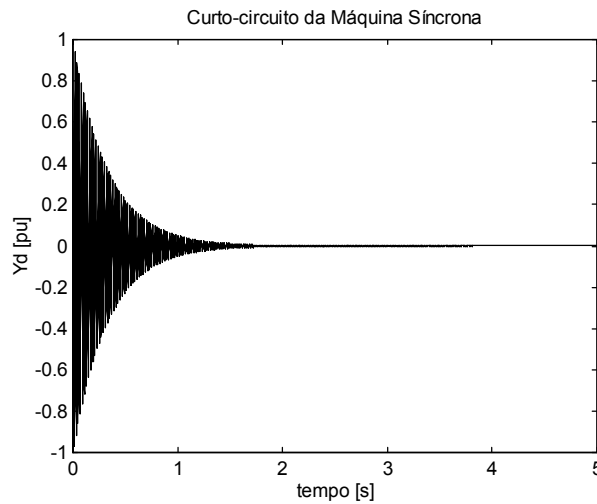
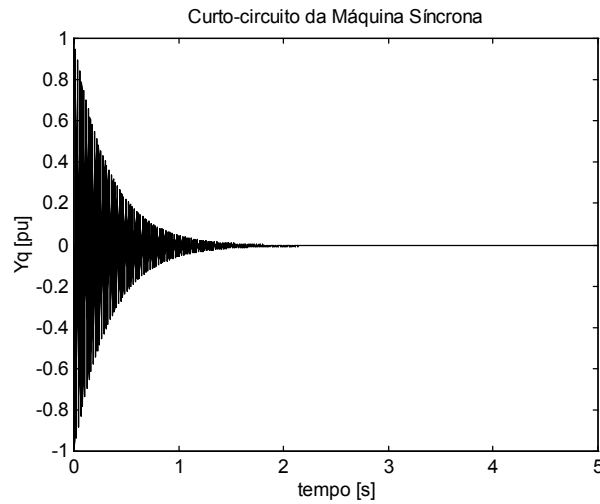
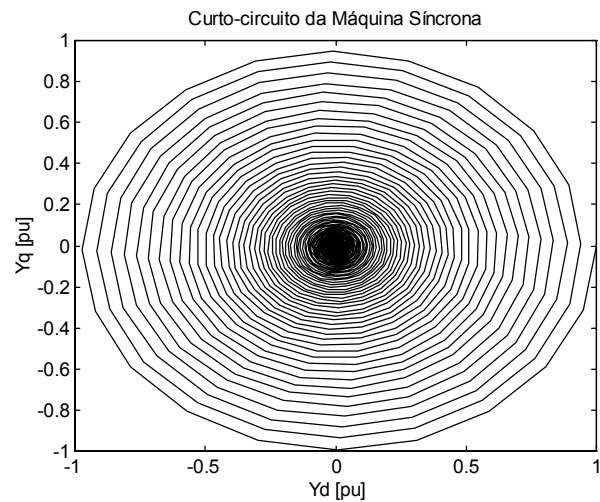


Figura 7.13. Fluxo segundo d .

Figura 7.14. Fluxo segundo q .Figura 7.15. Vector Fluxo dq .

A figura 7.15 representa a trajetória no espaço de fases dos fluxos d e q . Esta figura é uma forma diferente de representar as figuras anteriores.

Cálculo do Binário

O binário é obtido substituindo as expressões de ψ_d , ψ_q , i_d e i_q na expressão do binário 7.2 e rearranjando termos:

$$M_{em} = U^2 e^{-\frac{t}{\tau_a}} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{\tau_d'}} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-\frac{t}{\tau_d''}} \right] \sin \omega_0 t$$

$$+ \frac{U^2}{2} e^{-\frac{2t}{\tau_a}} \left(\frac{1}{X_q''} - \frac{1}{X_d''} \right) \sin 2\omega_0 t \quad (7.72)$$

U é o valor eficaz da tensão em vazio.

O termo da frequência dupla é relativamente pequeno. Assim, a componente principal do binário oscila à frequência fundamental e tem o valor inicial de U^2/x_d'' .

Na prática existe ainda uma componente do binário unidireccional devido às perdas nas resistências do estator, mas este termo não aparece na expressão devido às simplificações que se fizeram. A figura 7.15 apresenta o andamento do binário durante o curto-circuito.

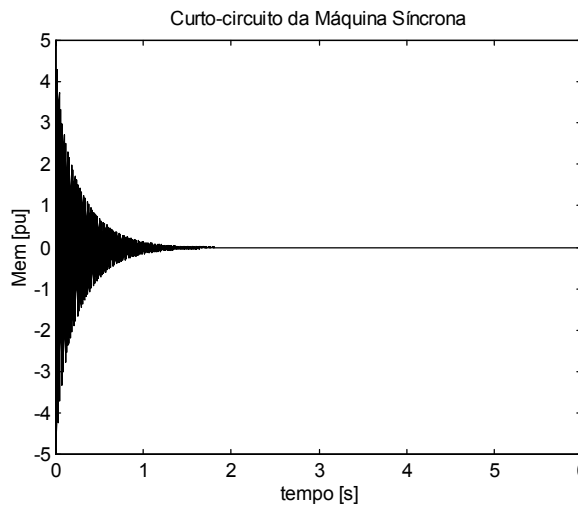


Figura 7.16a: Andamento do binário.

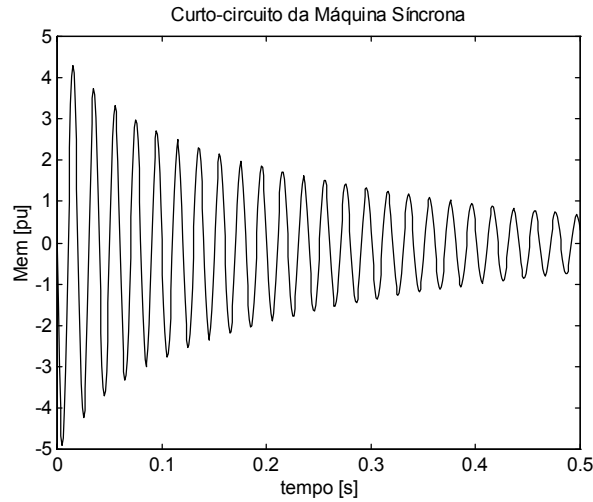


Figura 7.16b: Andamento do binário.

Corrente de excitação

A corrente de excitação pode ser calculada adicionando a corrente de excitação antes do defeito com as variações que ocorrem depois do defeito. Esta componente de variação pode ser obtida resolvendo as equações já utilizadas para o cálculo das correntes do estator.

A relação entre a corrente i_f e a corrente i_d pode ser obtida eliminando a corrente i_D das equações 7.8 com $u_f=0$. Obtém-se:

$$\otimes I_f(s) = \frac{-L_{md}s(1+s\tau_{kd})}{r_f(1+s\tau'_{do})(1+s\tau''_{do})} I_d(s) \quad (7.73)$$

A corrente $I_{d(s)}$ é substituída por 7.49.

$$\otimes I_f(s) = \frac{-(1+s\tau_{kd})}{r_f(1+s\tau'_d)(1+s\tau''_d)} \frac{s\omega_0}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)} \frac{X_{md}}{X_d r_f} \frac{U_m}{s} \quad (7.74)$$

como se tem normalmente $\tau'_d \gg \tau''_d$, τ_{kd} , pode fazer-se a aproximação,

$$\frac{-(1+s\tau_{kd})}{r_f(1+s\tau'_d)(1+s\tau''_d)} = \frac{1}{\tau'_d} \left[\frac{\tau'_d}{1+s\tau'_d} - \left(1 - \frac{\tau_{kd}}{\tau''_d} \right) \frac{\tau''_d}{1+s\tau''_d} \right] \quad (7.75)$$

Utilizando a técnica das transformadas de Laplace, obtém-se:

$$\otimes i_f = \frac{-U_m X_{md}}{\omega_o \tau_d' r_f X_d} \left[e^{-t/\tau_d'} - \left(1 - \frac{\tau_{kd}}{\tau_d''} \right) e^{-t/\tau_d''} - \frac{\tau_{kd}}{\tau_d''} e^{-t/\tau_a} \cos \omega_o t \right] \quad (7.76)$$

Como

$$\frac{-U_m X_{md}}{\omega_o \tau_d' r_f X_d} = \frac{i_{fo}}{\tau_d'} \frac{X_{md}^2}{\omega_o r_f X_d} = i_{fo} \left(\frac{\tau_{do}' - \tau_d'}{\tau_d'} \right) = i_{fo} \left(\frac{X_d - X_d'}{X_d'} \right) \quad (7.77)$$

A corrente total será a soma de i_{fo} com Δi_f

$$i_f = i_{fo} + i_{fo} \left(\frac{X_d - X_d'}{X_d'} \right) \left[e^{-t/\tau_d'} - \left(1 - \frac{\tau_{kd}}{\tau_d''} \right) e^{-t/\tau_d''} - \frac{\tau_{kd}}{\tau_d''} e^{-t/\tau_a} \cos \omega_o t \right] \quad (7.78)$$

A figura 7.17 mostra o andamento da corrente de excitação.

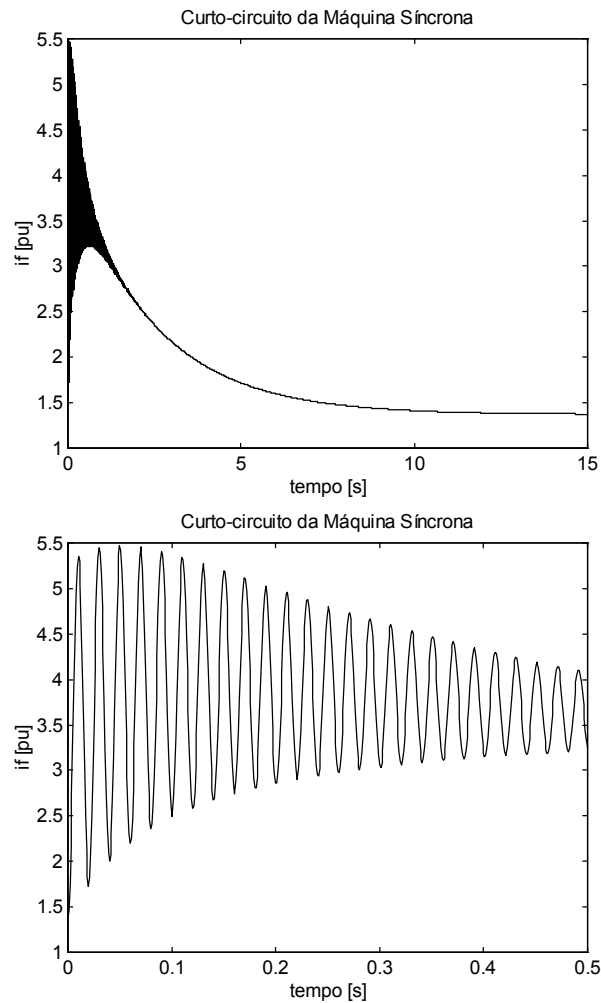


Figura 7.17. Corrente de excitação da máquina síncrona.

As figuras mostradas atrás foram obtidas com o programa de simulação que se encontra descrito em anexo. Utilizaram-se os parâmetros da máquina descrita no exemplo 1. Além destes resultados obtiveram-se os resultados que se apresentam a seguir.

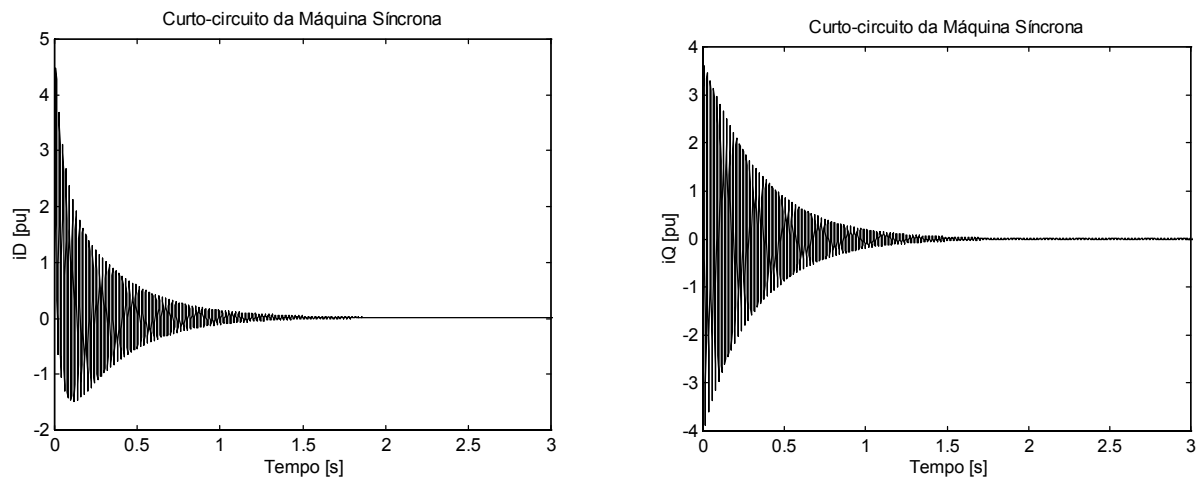


Figura 7.18. Correntes nos enrolamentos amortecedores.

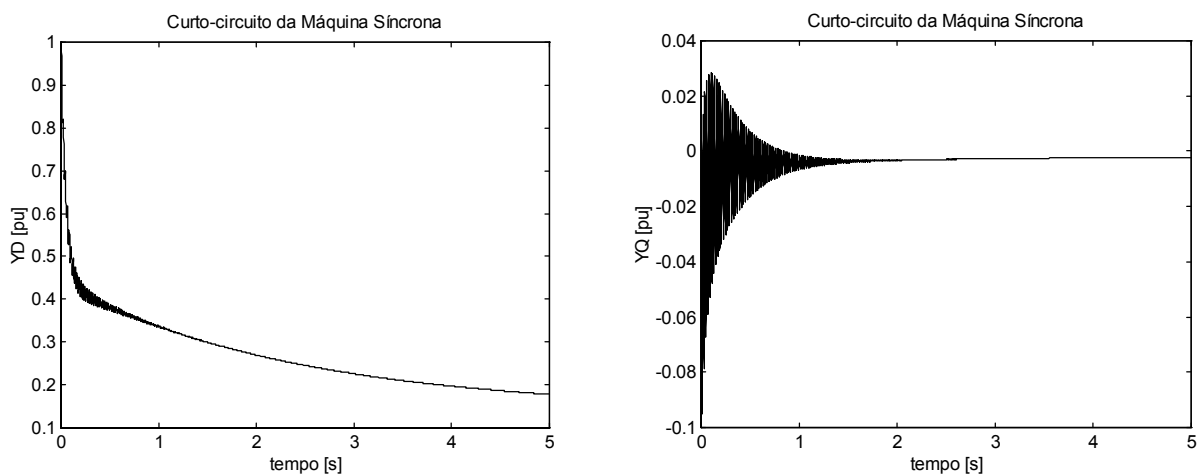


Figura 7.19. Fluxos nos enrolamentos amortecedores.

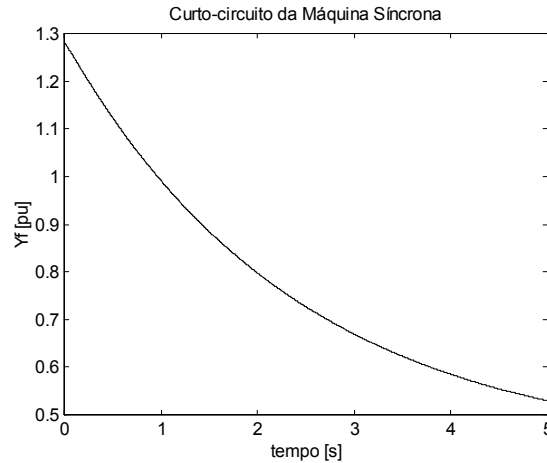


Figura 7.20. Fluxo no enrolamento de excitação.

Interpretação de resultados

Na análise que se apresentou, a velocidade da máquina, e por conseguinte a velocidade do referencial dq , são constantes e iguais à velocidade de sincronismo. As componentes DC no referencial dq são transformadas para o referencial do estator (correntes i_a , i_b e i_c) com a frequência ω_o e figuram nos termos em $\cos(\omega_o t)$ nas equações 7.64. Das componentes das correntes do induzido, apenas a componente i_d tem estas componentes contínuas. Estas também se verificam na corrente de excitação. Verificamos que os termos contínuos de i_d são iguais aos termos de frequência ω_o em i_a o que é fácil de compreender pois a transformação de Park representa uma mudança de referencial de velocidade ω_o .

Componentes de frequência fundamental, contínuas em dq

São os termos da primeira linha da equação 7.64. As amplitudes destes termos são determinadas por duas constantes de tempo τ_d' e τ_d'' que fazem dois decrescimentos a velocidades muito diferentes. A figura 7.21 representa o andamento da amplitude da componente alternada de frequência fundamental durante o transitório.

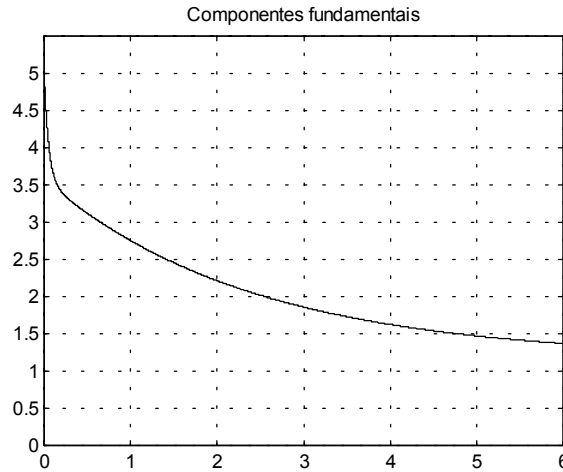


Fig. 7.21. Componente de frequência fundamental durante o curto-circuito.

No instante inicial, fazendo $t=0$, tem-se:

$$i_a = -\sqrt{2}U \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) \right] \cos(\omega_o t + \theta_0) \quad (7.79)$$

$$i_a = -\frac{\sqrt{2}U}{X_d''} \cos(\omega_o t + \theta_0)$$

O que sugere que a corrente é limitada pela reactância X_d'' . Este é o regime subtransitário. Numa primeira fase, a amplitude desta corrente vai decair com a constante de tempo τ_d'' . Este regime é caracterizado por existência de componentes contínuas nos enrolamentos amortecedores.

Quando se eliminar o termo regido pela constante de tempo subtransitória, restam os outros dois termos que são regidos pela constante de tempo transitória. Como esta constante de tempo é muito mais elevada do que a anterior, pode considerar-se, numa primeira aproximação que ainda não existiu nenhum decaimento devido à constante de tempo τ_d' .

$$i_a = -\sqrt{2}U \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/\tau_d'} \right] \cos(\omega_o t + \theta_0) \quad (7.80)$$

No instante inicial, tem-se:

$$i_a = -\frac{\sqrt{2}U}{X_d'} \cos(\omega_o t + \theta_0) \quad (7.81)$$

Analogamente à situação anterior, nesta situação sugere-se a reactância transitória X_d' para o limite da componente alternada da corrente. Neste regime as componentes contínuas dos enrolamentos amortecedores já se extinguíram.

Quando ambos os transitórios regidos pelas duas constantes de tempo terminarem, resta o termo constante que vale:

$$i_a = -\frac{\sqrt{2}U}{X_d} \cos(\omega_o t + \theta_0) \quad (7.82)$$

Também agora se sugere a reactância síncrona X_d . Neste regime, as correntes dos enrolamentos amortecedores já se extinguíram há muito tempo e também já não há variações da corrente do enrolamento de excitação.

Do ponto de vista da componente alternada, tudo se passa como se existissem três regimes, caracterizados por três valores da reactância que os determina: O regime subtransitário, o regime transitório e o regime permanente. O regime subtransitário é regido pela constante de tempo τ_d'' , e existe durante um ou dois ciclos. É também caracterizado por valores elevados de corrente. O regime transitório é caracterizado por uma outra constante de tempo muito mais elevada e por uma reactância também mais elevada.

Estes dois regimes também se verificam na corrente de excitação, com regimes transitórios equivalentes, e um binário oscilatório com uma frequência fundamental.

Componentes de frequência zero ou dupla da fundamental, frequência fundamental em dq

As componentes em ω_o de dq são:

$$\tilde{i}_d = U_m \frac{e^{-\alpha t}}{X_d''} \cos(\omega_o t) \quad (7.83a)$$

$$\tilde{i}_q = -U_m \frac{e^{-\alpha t}}{X_q''} \sin(\omega_o t) \quad (7.83a)$$

Estas duas componentes desenham uma elipse no plano dq . Podem ser decompostas da forma:

$$\tilde{i}_d = \frac{U_m}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t) + \frac{U_m}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t) \quad (7.84a)$$

$$\tilde{i}_q = -\frac{U_m}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \sin(\omega_o t) + \frac{U_m}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \sin(\omega_o t) \quad (7.84b)$$

Os dois primeiros termos oscilatórios de i_d e i_q quando representados no plano dq rodam no sentido negativo e desenham uma circunferência. Quando transformados para o referencial do estator têm a forma de componentes contínuas como se pode ver na equação 7.64. Por outro lado, os dois últimos termos das equações 7.84 rodam no sentido positivo desenhando também uma circunferência. Quando transformados para o referencial do estator rodam à velocidade de $2\omega_o$ como se pode ver na equação 7.64.

As correspondentes componentes da corrente no induzido são:

$$\begin{aligned} i_a = & \frac{\sqrt{2}U}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \cos(\theta_o) \\ & + \frac{\sqrt{2}U}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) e^{-\alpha t} \cos(2\omega_o t + \theta_o) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Estas componentes decaem exponencialmente com a constante de tempo igual a $\tau_a = 1/\alpha$. Estes termos têm a consequência nos fluxos, equações 7.70 e 7.71. Traduzem-se por um binário oscilatório de frequência dupla.

Na corrente de excitação também se verifica um termo de oscilação de frequência fundamental que também é determinado pela mesma constante de tempo.

Exemplo 7.2

Considere a situação de curto-circuito trifásico simétrico a partir do vazio. Determine as várias componentes de I_d e I_q bem como da corrente nas fases para a máquina do exemplo 1

Resolução

Das equações 7.51 e 7.52 tira-se:

$$\text{Componente contínua de } i_d: \frac{1}{X_d} = 1.1765$$

$$\text{Componente transitória: } \frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} = 2.3951$$

$$\text{Componente Subtransitória: } \frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} = 1.4285$$

$$\text{Componente oscilatória segundo } d: \frac{1}{X_d''} = 5$$

$$\text{Componente oscilatória segundo } q: \frac{1}{X_q''} = 4.9994$$

$$\text{Componente contínua nas fases b e c: } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3.0672$$

$$\text{Componente de frequência dupla} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) = 3 \times 10^{-4}$$

As figuras 7.21 e 7.22 apresentam o andamento no tempo das componentes mais interessantes.

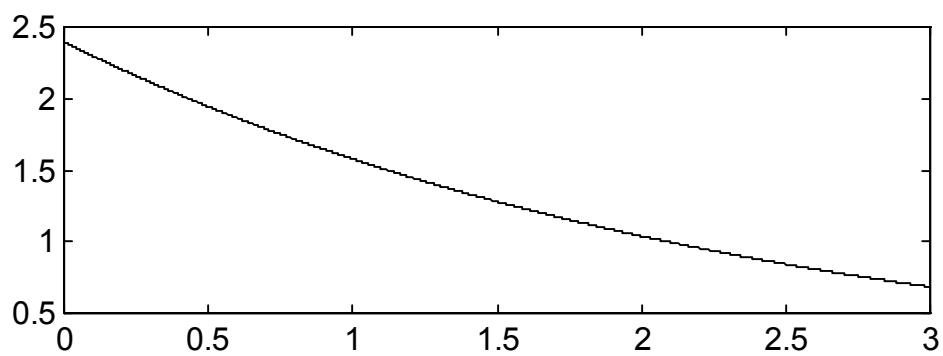


Figura 7.22: Componentes transitória e subtransitória de I_d

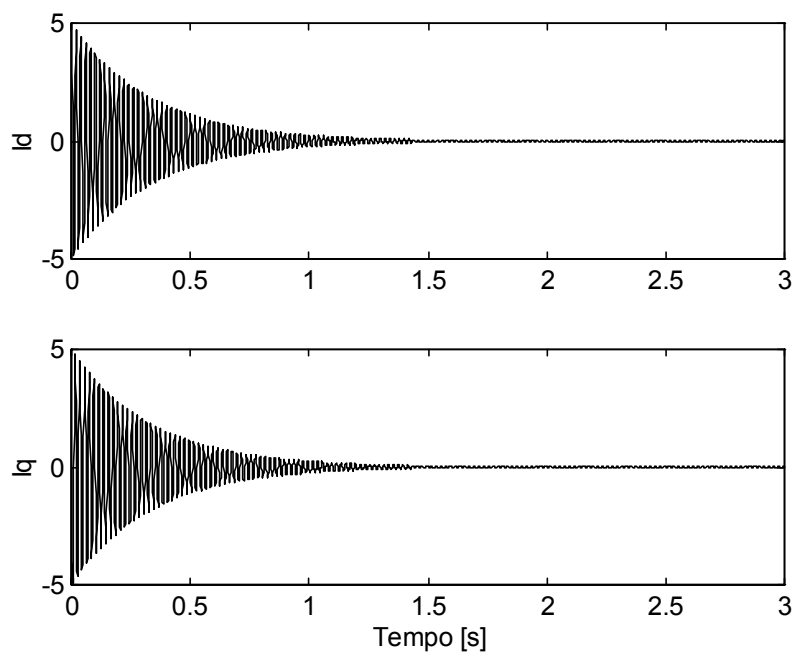


Figura 7.23: Componentes oscilatórias de I_d e I_q

7.4 Transitório de aplicação de carga à Máquina síncrona

Um transitório também muito interessante de analisar consiste em aplicar um escalão de binário de carga à máquina estando ela a funcionar como motor a partir do vazio.

As figuras seguintes apresentam os resultados obtidos com o programa de simulação.

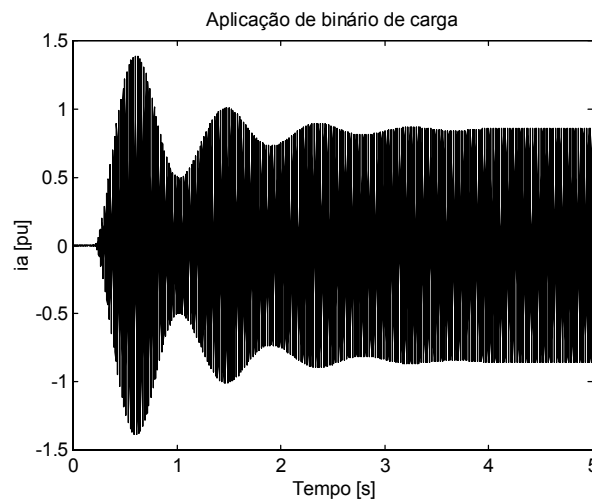


Figura 7.24. Corrente no induzido

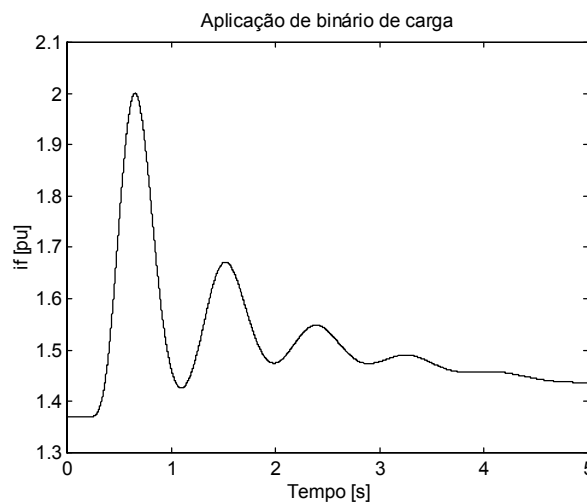
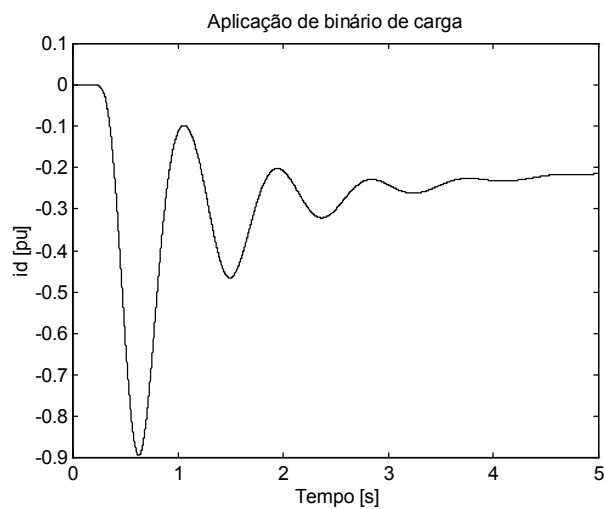
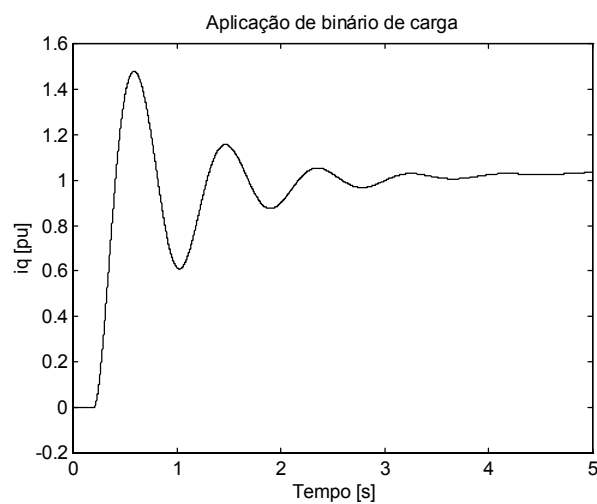
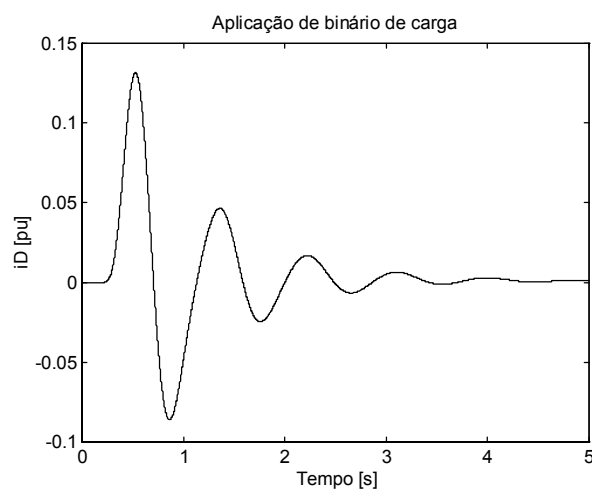


Figura 7.25. Corrente de excitação

Figura 7.26. Corrente no induzido segundo d Figura 7.27. Corrente no induzido segundo q Figura 7.28. Corrente nos amortecedores segundo d

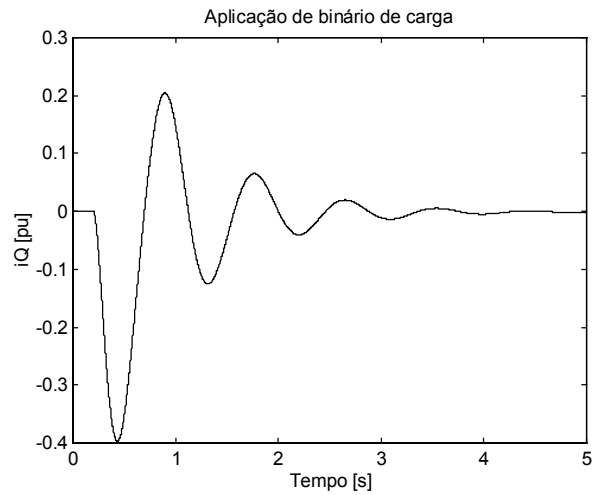


Figura 7.29. Corrente nos amortecedores segundo q

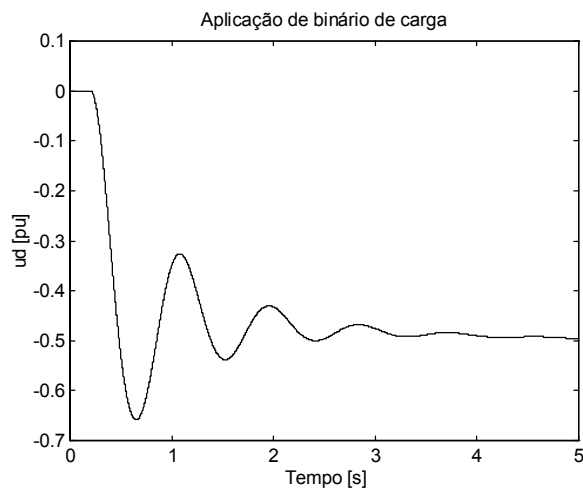


Figura 7.30. Tensão no induzido segundo d

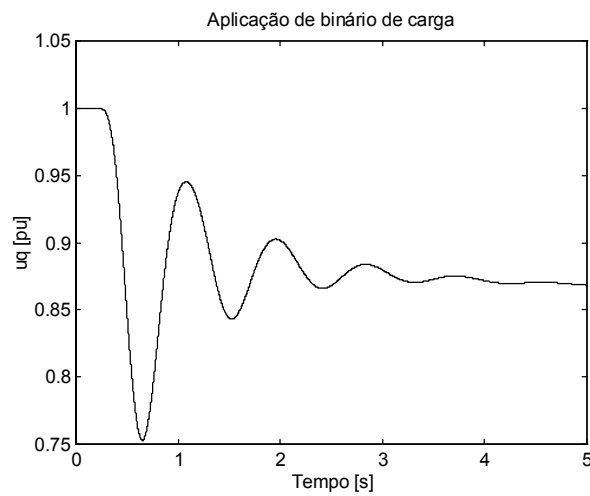


Figura 7.31. Tensão no induzido segundo q

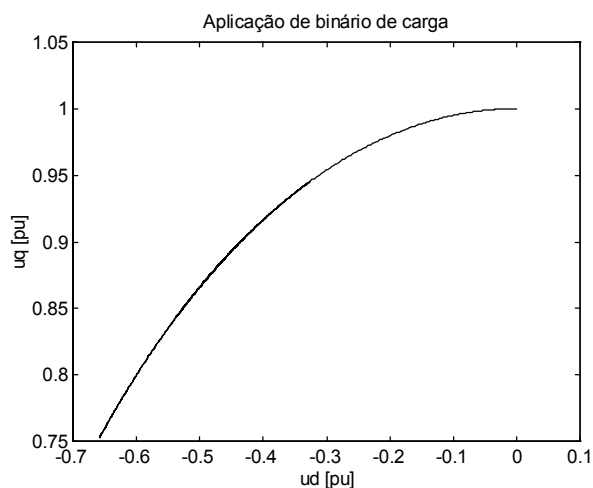


Figura 7.32. Tensão no induzido segundo dq

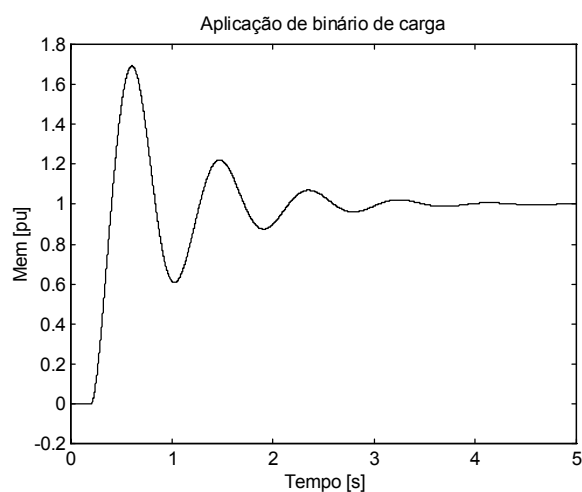


Figura 7.33. Binário electromecânico

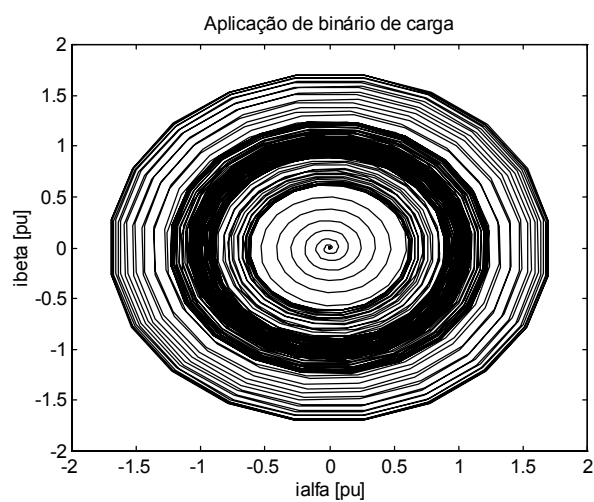


Figura 7.34. Vector corrente do induzido

Nota-se o comportamento oscilatório amortecido típico das máquinas síncronas. A frequência das oscilações é bastante baixa, cerca de 1 Hz. O amortecimento é devido à acção dos enrolamentos amortecedores.

Exercícios

I

Considere uma pequena rede eléctrica constituída por uma máquina síncrona, um transformador, uma linha e uma carga eléctrica de 120MW, 60Mvar.

Características da máquina síncrona.

$$S_n=300\text{MVA} \quad U_N=20\text{kV} \quad p=32 \quad f=50\text{Hz}$$

$$J=35.1 \times 10^6 \text{ Kg m}^2$$

Os parâmetros em valores por unidade são:

$$R_a=.0019 \quad R_f=.00041 \quad R_D=.0141 \quad R_Q=.0136$$

As matrizes dos coeficientes de indução em valores por unidade são:

$$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.73 & 0.73 \\ 0.73 & 0.9349 & 0.73 \\ 0.73 & 0.73 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ f \\ D \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0.48 & 0.36 \\ 0.36 & 0.629 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}$$

Características do transformador.

$$S_n=150\text{MVA} \text{ , } 50\text{Hz} \text{ , } 20/230\text{kV} \text{ , } U_{cc}=10\% \text{ ligações YY}$$

Características da linha

Reactância de $60\Omega/\text{fase}$

- a) Determine os parâmetros dos esquemas equivalentes que representam a máquina síncrona segundo os eixos d e q.
- b) Calcule as constantes de tempo e as reactâncias características da máquina síncrona.
- c) Pretende-se manter a tensão na carga no seu valor nominal ($U_n=230\text{kV}$).
 - c.1 Determine qual a tensão que o gerador deverá impor aos terminais do primário do transformador.
 - c.2 Determine a força electromotriz em vazio e a corrente de excitação em valores por unidade.
- d) Verificou-se um defeito na carga. A corrente na fase 1 é nula e existe uma impedância entre as fases 2 e 3 igual à impedância da linha. Calcule as

correntes e tensões no transformador. Faça as hipóteses que considerar necessárias e justifique-as.

- e) Este transformador tem uma ligação YY. Ambos os neutros estão ligados à terra. Quais os inconvenientes e vantagens que resultam do uso desta ligação. Compare-a com outras ligações.

II

Uma máquina síncrona de relutância (sem excitação) bipolar de 380V, $f=50$ Hz, 3 kW, 3 fases, tem os seguintes parâmetros:

$$r_s=1\Omega \quad L_{md}=0.1 \text{ H} \quad l_s=0.005 \text{ H} \quad L_{mq}=0.02 \text{ H}$$

a) A máquina encontra-se alimentada com uma fonte de tensão de frequência 50Hz, e valor eficaz 380V. O binário de carga é igual ao binário nominal. Calcule o ângulo de potência e as correntes do estator. Faça um diagrama vectorial para esta situação.

b) Repita a alínea a) com a máquina ligada a uma fonte de 190V e 25 Hz. Considere agora que o binário de carga é igual a metade do binário nominal.

Que poderá dizer acerca do comportamento dinâmico desta máquina? Será que neste caso se poderá observar os regimes subtransitário, transitório e permanente?

Anexo A: Programa de simulação “SindqfDQ”

Este anexo descreve o programa de simulação usado para a obtenção dos resultados que se mostraram ao longo do capítulo.

1. Modelo de Simulink

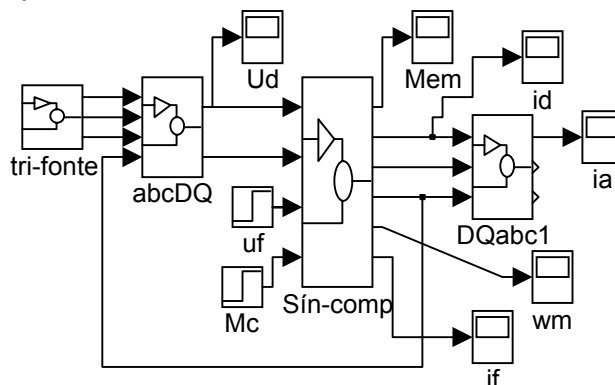


Fig. A1. Modelo da máquina síncrona

Máquina Síncrona com Enrolamentos Amortecedores

Os parâmetros estão em Krausep

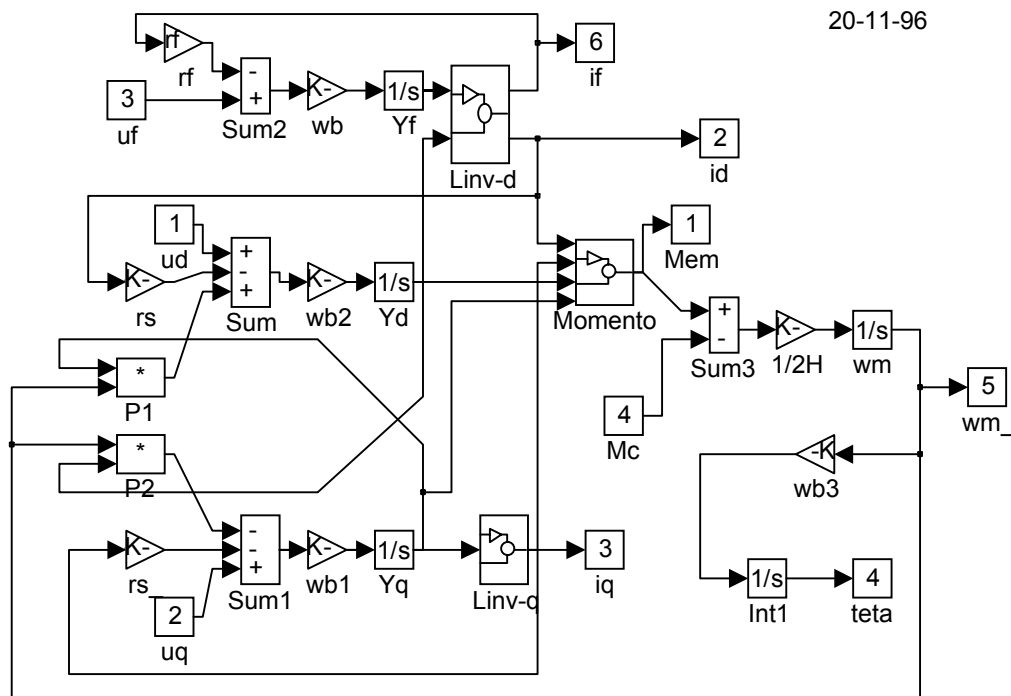


Fig. A2. Bloco Sim_comp

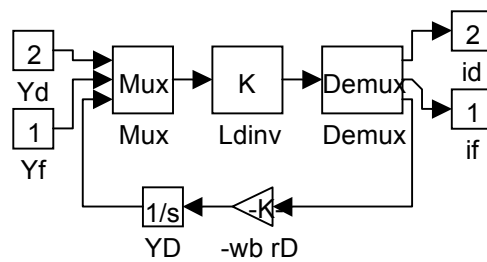


Fig. A3. Bloco Linv-d

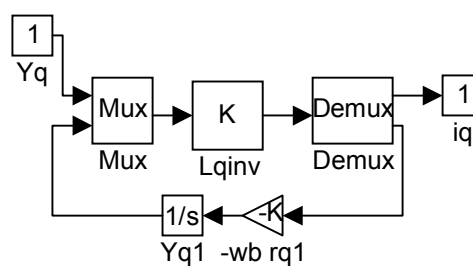


Fig. A4. Bloco Linv-q

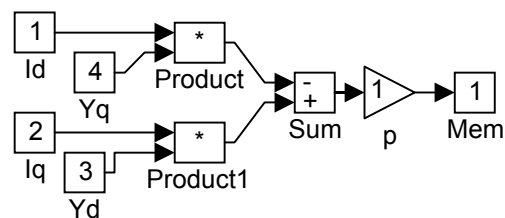


Fig. A5. Bloco Momento

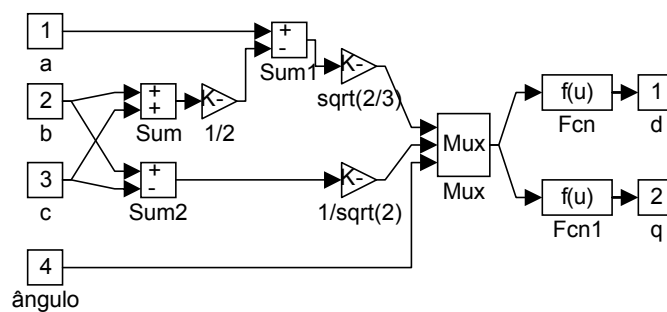


Fig. A6. Transformação abc-dq

Anexo B: Tabela de transformadas de Laplace utilizadas

Função	Transformada de Laplace
Escalão unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n \exp(-\alpha t)}{n!} u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$
$\cos(\omega_o t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$
$\text{sen}(\omega_o t) u(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$
$\exp(-\alpha t) \cos(\omega_o t) u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_o^2}$
$\exp(-\alpha t) \text{sen}(\omega_o t) u(t)$	$\frac{\omega_o}{(s + \alpha)^2 + \omega_o^2}$
$e^{-at} - e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o^2}{(s + a)(s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2)} \quad (a, \alpha) \ll \omega_o$
$e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{s \omega_o}{(s + a)(s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2)} \quad (a, \alpha) \ll \omega_o$

Bibliografia

Livros

- Adkins, B. “The General Theory of Electrical Machines”, Pitman, 1962.
- Bose Bimal K. ed. “*Power Electronics and Variable Frequency Drives, Technology and Applications*”, IEEE Press 1997
- Boldea, Ion; Nasar, S. A. “Electric Drives”, CRC Press, 1999.
- Buhler H., “*Electronique de Reglage et de Comande*”, Presses Polytechniques Romandes, 1990.
- Concordia C., “*Synchronous Machines, Theory and Performance*”, Jonhn Wiley & Sons, 1951.
- Dente, Joaquim, “Controlo de Sistemas Electromecânicos”, Textos de apoio à disciplina de Controlo de sistemas Electromecânicos.
- Dente, Joaquim, “Sistemas Electromecânicos”, Textos de apoio à disciplina de Sistemas Electromecânicos.
- Fitzgerald, A. E., Kingsley C., Umas Stephen D., “*Electric Machinery*”, Fifth Edition on SI Units, McGraw-Hill 1992.
- Kassakian John G., Schlecht Martin F., Verghese George C., “*Principles of Power Electronics*”, Addison Wesley, 1992.
- Kazmierkowski M., Tunia H., “*Automatic Control of Converter-fed Drives*”, Elsevier Publishers, 1994.
- Keleman, Árpád, Imecs Maria, “*Vector Control of AC Drives*”, Écriture Budapest.
- Kenjo and Nagamori, “*Permanent-Magnet and Brushless DC Motors*”, Oxford Science Publications, 1985.

- Krause, Paul C., Wasynczuk, Oleg, Sudhoff, Scott D. “Analysis of Electric Machinery”, IEEE Press, 1996.
- Labrique Francis, Santana João, “*Electrónica de Potência*”, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1991
- Leonard W., “*Control of Electrical Drives*”, Springer Verlag 1996.
- Mohan, Undeland, Robins, “*Power Electronics*”, Second edition, Editor Wiley.
- Novotny, D. W.;Lipo T.A. “*Vector Control and Dynamics of ac Motor Drives*”, Oxford Science Publications, 1996.
- O’Kelly and Simmons, “*Introduction to Generalized Electrical Machine Theory*”, McGraw-Hill, 1968
- Rajashekara Kaushik Kawamura, Atsuo, Matsuse Kouki, “*Sensorless Control of AC Motor Drives, Speed and Position Sensorless Operation*”, IEEE Press, 1996.
- Retter, G. J., “*Matrix and Space-phasor theory of Electrical Machines*” Akadémiai Kiadó, Budapest. 1987.
- Silva, Fernando,”*Electrónica Industrial*”, Gulbenkian, 1999.
- Slemon, Gordon R., “*Electric Machines and Drives*”, Addison Wesley, 1992.
- Trzynadlowski, Andrej M., “*The field Orientation Principle in Control of Induction Motors*”, Kluwer Academic Publishers.
- Vas, Peter, “*Sensorless Vector and Direct Torque Control*”, Oxford Science Publications, 1988.
- Vas, Peter, “*Electrical Machines and drives, A Space-Vector Theory Approach*”, Oxford Science Publications, 1996.
- Vas, Peter, “*Parameter Estimation, condition Monitoring, and Diagnosis of Electrical Machines*”, Oxford Science Publications, 1993.
- White, D., Woodson, “*Electromechanical Energy Conversion*”. Chapman & Hall, Limited, 1959.

