

O efeito de Hall no Germânio p

7 de Novembro de 2005

1 O efeito de Hall em metais

1.1 A tensão de Hall em termos da velocidade de deriva

Em 1879 Edwin Hall descobriu que quando um condutor atravessado por corrente eléctrica é colocado num campo magnético se gera uma voltagem na direcção perpendicular ao campo magnético e à corrente. Este efeito chama-se **Efeito de Hall** e permite medir:

1. o sinal da carga dos portadores;
2. a densidade dos portadores;
3. o campo magnético aplicado.

Para compreender o efeito de hall começamos por analisar a figura 1.

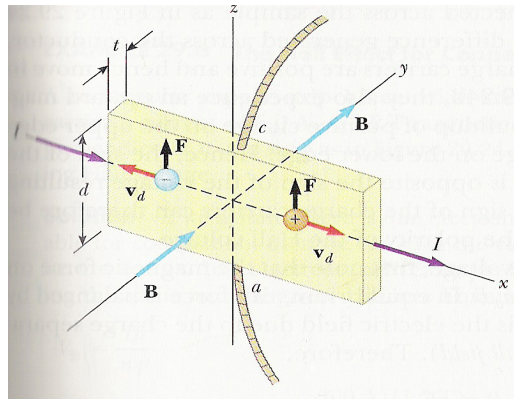


Figura 1: O efeito de Hall

Nesta figura vemos uma pequena placa condutora. O campo magnético está na direcção y e a corrente é injetada na direcção x (o que quer dizer que as cargas

móveis positivas vão na direcção x e que as cargas móveis negativas vão na direcção $-x$). Mede-se então a chamada **tensão de Hall** entre o pontos a e c , isto é, na direcção z .

Para seguir o processo que leva à criação da tensão de Hall talvez a figura 2 seja mais simples.

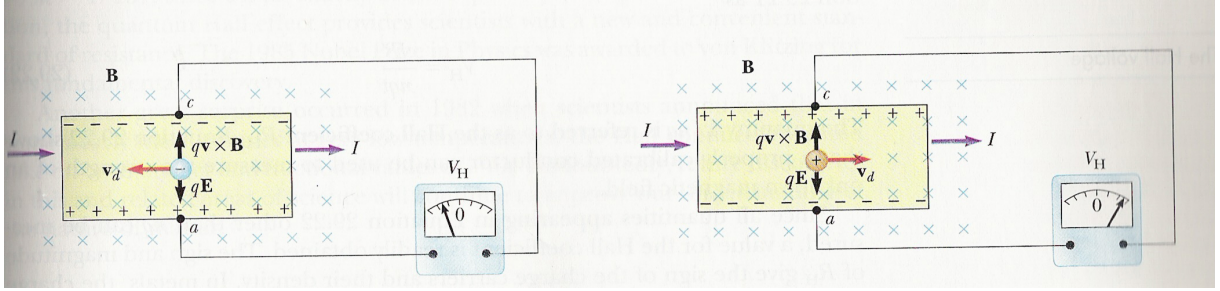


Figura 2: A tensão de Hall

No caso dos electrões a força de Lorentz vale

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = evB\hat{z}. \quad (1)$$

No caso dos portadores positivos (lacunas, p. ex.) a força de Lorentz vale

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = evB\hat{z}. \quad (2)$$

A força de Lorentz é a mesma porque as cargas opostas são compensadas pelas velocidades opostas. Portanto, os electrões/lacunas tendem a acumular-se no topo da placa, deixando um défice de carga negativa/positiva no fundo da placa, que assim se torna electricamente positiva/negativa. Gera-se assim um campo — o campo de Hall, \mathbf{E}_H — no sentido positivo/negativo dos zz . A tensão de Hall corresponde a esta acumulação de cargas. Como se vê, **o sinal da tensão de Hall depende do sinal dos portadores de carga: $V_{ca} < 0$ para electrões e $V_{ca} > 0$ para lacunas.** É por isso que o efeito de Hall se presta à determinação do sinal da carga dos portadores.

A força que actua nos electrões devida ao campo de Hall é

$$\mathbf{F}_H = q\mathbf{E}_H = -e\mathbf{E}_H = -eE_H\hat{z} \quad (3)$$

e a que actua nas lacunas é

$$\mathbf{F}_H = q\mathbf{E}_H = e\mathbf{E}_H = -eE_H\hat{z}. \quad (4)$$

Em ambos os casos as forças de Lorentz e Hall são opostas. A força total aplicada nos dois casos é

$$\mathbf{F}_T = q(vB - E_H)\hat{z}. \quad (5)$$

A acumulação de cargas aumenta o campo de Hall. Assim, a acumulação de cargas continua até que o campo de Hall é tal que a força eléctrica compensa a força de Lorentz. Nessa altura a força resultante é nula e os portadores vão a direito e já não são deflectidos. O sistema fica em equilíbrio.

A tensão de Hall pode ser determinada a partir de (5). No equilíbrio $\mathbf{F}_T = 0$, ou seja,

$$E_H = vB. \quad (6)$$

Se o campo for uniforme e d for a altura (segundo z) da placa condutora, então podemos escrever

$$V_H = E_H d = vBd. \quad (7)$$

Esta expressão mostra que

- se pode medir B se v for conhecido;
- ou que se pode medir v se B for conhecido.

O que é v ? É a velocidade de deriva dos electrões dentro do condutor, i. e., é a velocidade média com que os electrões se deslocam dentro do condutor. Na secção seguinte relembramos como estimar esta velocidade de deriva.

1.2 Velocidade de deriva

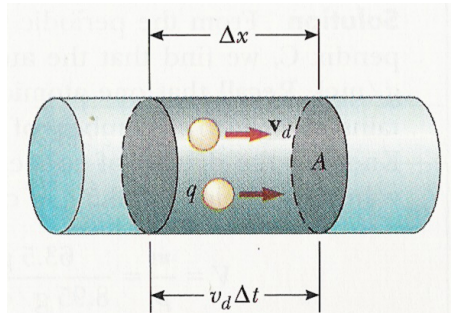


Figura 3: Velocidade de deriva

Para determinar a velocidade de deriva podemos pensar num condutor de secção recta A , tal como ilustrado na figura 3. Consideremos uma porção desse condutor, de comprimento Δx . Temos então que o volume dessa porção é $V = A\Delta x$. Se a

densidade de portadores (m^{-3}) for n , então o número total de portadores em V é

$$N = nV = nA\Delta x \quad (8)$$

e carga total dos portadores no volume V é

$$\Delta Q = qN = qnV = qnA\Delta x. \quad (9)$$

Mas podemos pensar que a velocidade média dos portadores — a sua velocidade de deriva — é v . Então podemos escrever $\Delta x = v\Delta t$, em que Δt é o tempo médio que os portadores levam a atravessar o volume. Então

$$\Delta Q = qnAv\Delta t. \quad (10)$$

Ora, a definição de corrente é

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad (11)$$

pelo que concluímos que a corrente vale

$$I = nqvA. \quad (12)$$

Qual é a velocidade de deriva num fio de cobre de $A = 3.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ percorrido por uma corrente de 10 A? [$m(\text{Cu})=63.5 \text{ g/mol}$, $\rho(\text{Cu}) = 8.95 \text{ g/cm}^3$ e cada átomo contribui com um electrão para a banda de condução]

R: de (12) temos que

$$v = \frac{I}{nqA}.$$

Só precisamos de determinar n , que vale

$$n = \frac{6.023 \times 10^{23}}{\text{V de uma mole}} = \frac{6.023 \times 10^{23}}{63.5 \text{ g} / 8.95 \text{ g/cm}^3} = 8.48 \times 10^{28} \text{ electrões/m}^3.$$

O valor final de v é

$$v = 2.46 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Este valor é muito baixo! Um electrão leva 68 minutos a viajar 1 metro! Como explicar então que a luz se acende instantaneamente? É porque é o campo eléctrico que se propaga quase à velocidade da luz, não os electrões! Os electrões do filamento da lâmpada sentem logo a acção do campo e começam logo a mover-se, induzindo a emissão de luz — apesar dos seus colegas que estão no início do fio poderem demorar horas a chegar!

1.3 O coeficiente de Hall

De (12) temos então

$$v = \frac{I}{nqA}. \quad (13)$$

No caso da placa é $A = td$, em que t é a espessura (ver figura 1). Então, substituindo em (7) temos

$$V_H = \frac{IBd}{nqtd} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{t} \equiv R_H \frac{IB}{t}, \quad (14)$$

onde definimos o **coeficiente de Hall**

$$R_H = \frac{1}{nq}. \quad (15)$$

O coeficiente de Hall pode ser bem determinado. Basta ter um material bem calibrado, para o qual sabemos com muita exactidão o valor da densidade de portadores. Então (14) mostra que através do controlo preciso de I (e t , claro, que é fácil) podemos determinar o campo B , pois então $V_H = \text{constante} \cdot B$, com a constante conhecida.

Inversamente, se B é conhecido, então pode determinar-se R_H , que dá directamente a concentração dos portadores e o seu sinal.

2 O efeito de Hall em semicondutores

Já vimos o que acontece no efeito Hall num metal ou, pelo menos, com apenas um tipo de portadores. Vejamos agora o que acontece num semiconductor, com dois tipos de portadores presentes.

A situação está ilustrada na figura . Embora electrões e lacunas se dirijam em direcções opostas, a densidade de corrente

$$j_x = -ev_en + ev_hp = e(|v_{ex}|n + |v_{hx}|p) \quad (16)$$

tem a mesma direcção para ambas. Da mesma forma a força de Lorentz $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tem a mesma direcção nos dois casos porque as cargas opostas compensam as velocidades opostas. Sendo assim a acumulação de cargas dá-se do mesmo lado da barra e a tensão de Hall será positiva ou negativa dependendo da concentração e mobilidade dos portadores.

Para descrever a situação temos de partir das equações de movimento para os dois tipos de portadores. Estas equações serão

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\tau_e} - \frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = -\frac{\mathbf{v}_h}{\tau_h} + \frac{e}{m_h}(\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}) \end{cases} \quad (17)$$

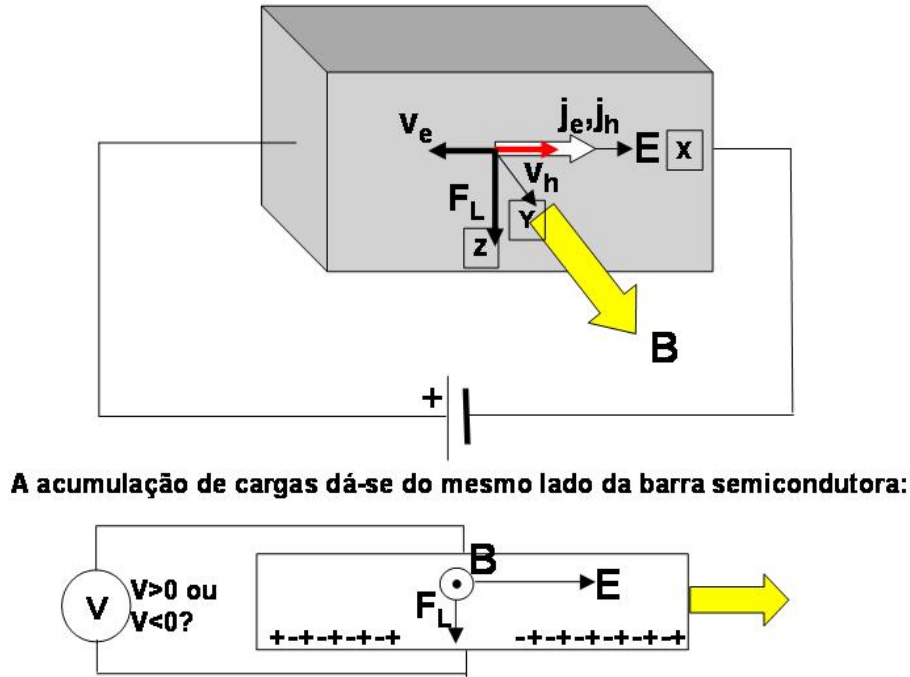


Figura 4: O efeito Hall num semicondutor.

Nestas equações acrescentou-se um termo colisional que dá conta da oposição das colisões ao aumento da velocidade induzido pelo campo.

Para resolver este sistema vamos usar o facto de que no estado estacionário (quando a força de Hall compensa a força de Lorentz) se tem

$$\frac{d}{dt} = 0. \quad (18)$$

Além disso usa-se ainda o facto de que a densidade de corrente segundo y e z há-de ser nula. Segundo y a densidade de corrente é nula tanto para electrões como para lacunas pois não se forma nenhum campo eléctrico segundo y . Assim, temos

$$j_{ey} = j_{hy} = 0. \quad (19)$$

Quanto à componente z , é um pouco mais delicado: o campo segundo z pode ser positivo ou negativo. Em qualquer caso a velocidade das lacunas é oposta à velocidade dos electrões. No entanto o que tem de ser globalmente nula é a densidade de corrente, que será

$$j_z = -env_{ez} + epv_{hz} = -e(nv_{ez} - pv_{hz}) = 0. \quad (20)$$

Introduzindo (18)-(20) no sistema (17) obtemos para o campo de Hall

$$E_z = -\frac{j_x B (n\mu_e^2 - p\mu_h^2)}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2} \quad (21)$$

e para o coeficiente de Hall

$$R_H = \frac{E_z}{j_x B} = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2} \quad (22)$$

Basicamente podemos dizer que:

1. o campo de Hall continua a ser directamente proporcional ao campo magnético aplicado;
2. o campo de Hall continua a ser directamente proporcional à densidade de corrente;
3. mas que o sinal do campo de Hall e do coeficiente de Hall depende da relação entre densidade de electrões e lacunas e também das suas mobilidades;
4. apenas em casos extremos $n \ll p$ ou $n \gg p$ é que podemos simplificar a expressão do coeficiente de Hall e recuperar a expressão dos metais. Por exemplo, se $n \gg p$, então

$$R_H \simeq \frac{-n\mu_e^2}{en^2\mu_e^2} = -\frac{1}{en}. \quad (23)$$

3 Comentários sobre as medições da experiência

3.1 Geral

A figura 5 mostra as ligações fundamentais da placa utilizada para a experiência.

Na experiência não medimos directamente o campo de Hall, mas a tensão de Hall,

$$\mathbf{E}_H = -\nabla V_H. \quad (24)$$

Se o campo for uniforme, como deve ser o caso na placa utilizada,

$$E_H = \frac{V_H}{h}, \quad (25)$$

em que h é a altura da placa.

Da mesma forma, o que se mede com o amperímetro não é directamente j_x , mas este pode ser determinado a partir da corrente que se mede, I , por

$$j_x = \frac{I}{A}, \quad (26)$$

em que A é a secção transversal da placa.

Portanto, em resumo, tanto as tensões como as correntes são proporcionais às grandezas que considerámos, respectivamente E_H e j_x .

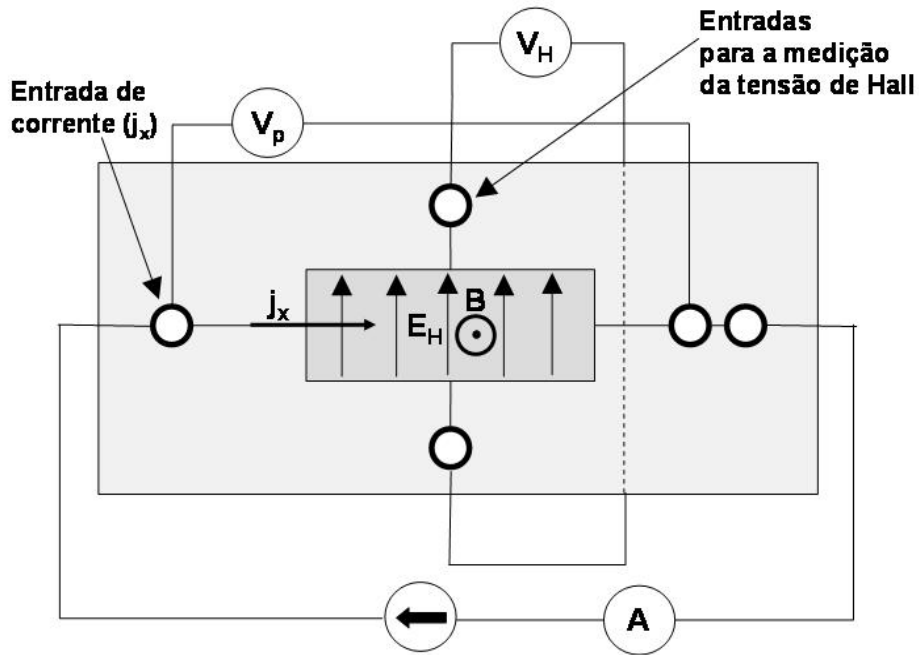


Figura 5: Esquema fundamental da placa de Hall.

3.2 Primeira medição: $V_H = V_H(j_x)$

Na primeira medida determina-se a dependência da tensão de Hall na corrente. Ora, de (21) vemos que o campo de Hall é directamente proporcional à densidade de corrente. Portanto esperamos uma recta, e é isso que realmente se verifica em 6:

3.3 Segunda medição: $V_p = V_p(B)$

Na figura 5 indicou-se a tensão através da placa por V_p . A segunda medição consiste em fazer precisamente a medição de V_p em função de B . Ora, como se sabe, $V = RI$ e portanto a tensão através da placa é determinada com a resistência da placa, já que a corrente é mantida constante, a 30 mA.

A versão da lei de Ohm em termos do campo e da densidade de corrente é

$$E_x = \rho j_x, \quad (27)$$

em que ρ é a resistividade do semiconductor. Introduzindo a mobilidade através de

$$\mu = \frac{|v|}{E}, \quad (28)$$

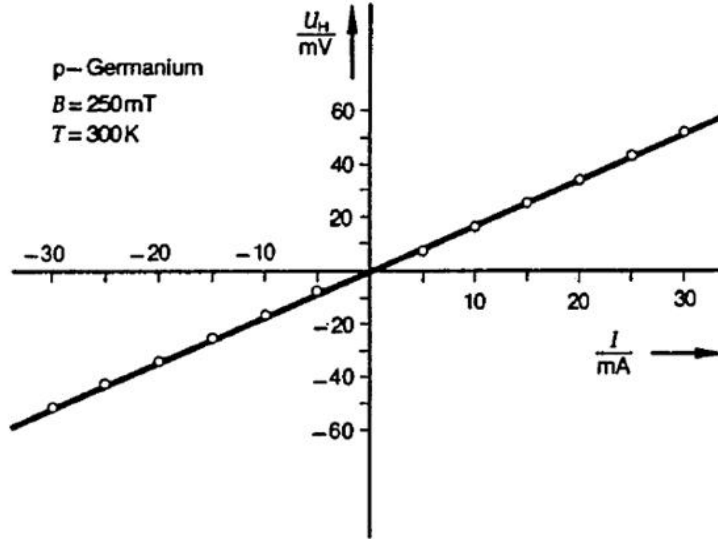


Figura 6: Primeira medição: $V_H = V_H(j_x)$

podemos escrever

$$\rho = \frac{E_x}{j_x} = \frac{1}{e(n\mu_e + p\mu_h)}. \quad (29)$$

Mas como ainda temos

$$\mu = \frac{q\tau}{m}, \quad (30)$$

em que τ é o tempo de colisão médio (ver notas mais completas fornecidas nos “complementos”), vem

$$\rho = \frac{1}{e \left(\frac{n}{m_e} \tau_e + \frac{p}{m_h} \tau_h \right)}. \quad (31)$$

À temperatura ambiente esperamos que as impurezas estejam todas ionizadas mas que os portadores intrínsecos ainda não estejam disponíveis [porque a energia de ionização das impurezas (valor típico meV) é muito menor do que o valor do hiato de energia (valor típico eV) — ver notas mais completas fornecidas nos “complementos”]. Assim, como se o semiconductor que estamos a usar é do tipo p, esperamos que $p \gg n$ à temperatura ambiente. Então deve ser

$$\rho \approx \frac{m_h}{ep\tau_h} \quad (32)$$

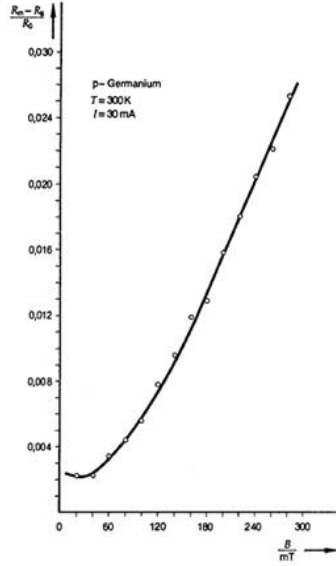


Figura 7: Segunda medição: $V_p = V_p(B)$

A questão que se põe é portanto perceber qual a dependência de τ_h em B . Ora, apesar de no equilíbrio a densidade de corrente continuar apenas segundo x , a introdução do campo magnético deve, no entanto, introduzir uma componente colisional segundo z (ver figura 4). Assim, a frequência das colisões deve aumentar e portanto esperamos que o tempo de colisão, τ , diminua:

$$B \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow \Rightarrow \rho \uparrow . \quad (33)$$

Claro que se ρ aumenta então a resistência da placa de Hall também aumenta e consequentemente a tensão aos seus terminais também. **Em resumo, esperamos que $V_p(B)$ seja uma função crescente de B .**

Com efeito assim é, o que está ilustrado na figura 7.

Note-se que nesta figura o que está representado é a variação da resistência relativamente à resistência sem campo:

$$\frac{R_m - R_0}{R_0} = \frac{V_p/I - V_p(B=0)/I}{V_p(B=0)/I} = \frac{V_p - V_p(B=0)}{V_p(B=0)} \quad (34)$$

se I tiver sido mantido rigorosamente constante.

A forma analítica exata da variação de ρ com B sai fora do âmbito do nosso estudo. Limitamo-nos portanto a fazer uma análise semi-quantitativa desta medição.

3.4 Terceira medição: $E_p = E_p(T)$

Tal como na secção anterior, V_p é proporcional à resistência da amostra, que é proporcional à sua resistividade. Pode mostrar-se que (ver a demonstração nas notas mais completas fornecidas nos “complementos”)

$$\rho \stackrel{??}{=} \frac{1}{\sigma} \stackrel{??}{=} \frac{1}{T^{3/2-\alpha} e^{-E_g/2k_B T}} = T^{-3/2+\alpha} e^{E_g/2k_B T}. \quad (35)$$

Nesta expressão o factor exponencial é basicamente o factor de Boltzmann $e^{E_g/2k_B T}$ que está relacionado com a probabilidade de ter electrões com energia suficiente para passar o hiato de energia; a condutividade aumenta com o número desses electrões e portanto compreendemos que $\rho \sim e^{E_g/2k_B T}$. O factor $T^{3/2}$ vem do cálculo mais rigoroso da densidade de portadores.

Portanto esperamos que

$$V_p \propto \rho \propto T^{-3/2+\alpha} e^{E_g/2k_B T} \sim e^{E_g/2k_B T}. \quad (36)$$

MAS ATENÇÃO! Esta expressão é válida para o regime de condutividade intrínseca! O semiconductor que vamos usar é do tipo p e por isso esta expressão pode não estar certa. Na verdade aplica-se em certa gama de temperaturas.

A forma como a condutividade se altera está ilustrada na figura 8. Para temperaturas elevadas ($1/T$ baixo – note-se que o eixo das abcissas do gráfico é $1/T$) esperamos que haja muito mais portadores intrínsecos do que portadores dados pelas impurezas. Assim, neste regime o semiconductor é para todos os efeitos intrínseco. Nesta região a expressão (36) é válida. O início desta região deve dar-se basicamente em torno de

$$k_B T = E_g \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{k_B}{E_g}. \quad (37)$$

Por outro lado, para temperaturas muito baixas ($1/T$ elevado) não há portadores intrínsecos e todos os portadores estão a ser fornecidos pelas impurezas. Podemos considerar todas as impurezas ionizadas a partir de

$$k_B T = E_d \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{k_B}{E_d}, \quad (38)$$

em que E_d é a energia de ionização. Para temperaturas inferiores a E_d/k_B a condutividade deve variar na forma $e^{-E_d/k_B T}$.

Finalmente, na zona intermédia $E_d/k_B < T < E_g/k_B$ já todas as impurezas estão ionizadas mas ainda não há energia para promover portadores intrínsecos à banda de condução. Portanto a condutividade não varia nesta zona.

Se fizermos o gráfico de V_p^{-1} (que é $\propto \sigma$) e não de V_p (que é $\propto \rho = \sigma^{-1}$) então temos

$$V_p^{-1} \sim e^{-E_g/2k_B T}. \quad (39)$$

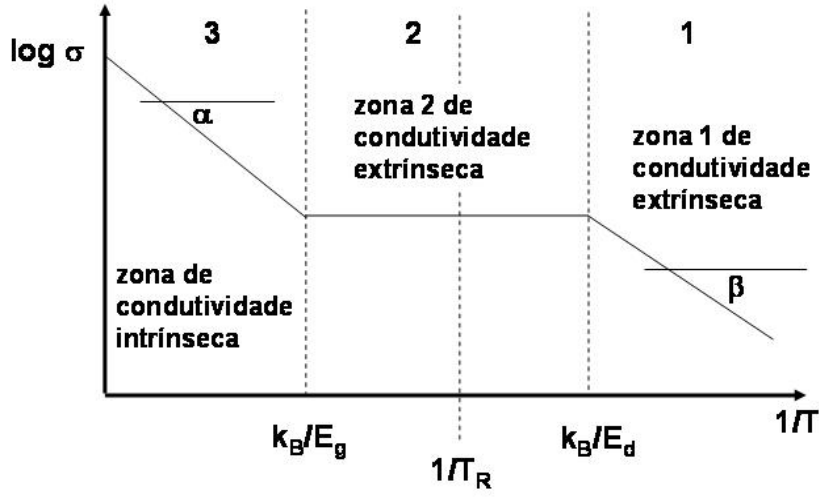


Figura 8: os vários regimes de condutividade para um semicondutor dopado.

na zona intrínseca e devemos obter um gráfico que é aproximadamente equivalente à metade esquerda da figura 8. Realmente, é isso que se observa na figura 9.

A partir do declive do gráfico na zona intrínseca retira-se o valor do hiato de energia. A partir da figura temos $dec = (\ln 0.8 - \ln 3.3)/(2.62 - 2.26) \times 10^3 = -3936$ K. Ora, de acordo com (39) este declive vale

$$dec = -\frac{Eg}{2k_B}. \quad (40)$$

Como é

$$k_B = 8.625 \times 10^{-5} \text{ eV/K}, \quad (41)$$

vem

$$Eg = 3936 \times 2k = 0.68 \text{ eV}. \quad (42)$$

3.5 Quarta medição: $V_H = V_H(B)$

Trata-se de aplicar (21)

$$E_H = -\frac{j_x B (n\mu_e^2 - p\mu_h^2)}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2}. \quad (43)$$

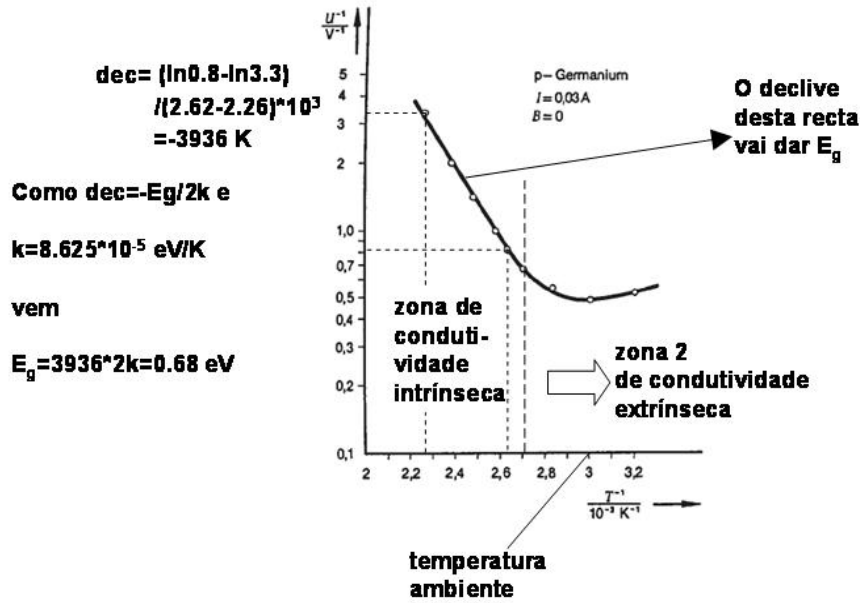


Figura 9: Terceira medição: $V_p = V_p(T)$

À temperatura ambiente a contribuição das impurezas domina e portanto $p \gg n$. Segue-se que

$$E_H \approx \frac{j_x B}{ep} = R_H j_x B, \quad (44)$$

com

$$R_H = \frac{1}{ep}. \quad (45)$$

Portanto espera-se uma recta: o campo de Hall depende linearmente de B .

Mas podemos tirar bastante mais informações. A recta que realmente se traça é

$$V_H = a + bB \quad (46)$$

para ver qual é o declive, escrevamo-la em termos de E_H e I :

$$V_H = E_H h = R_H j_x B h = R_H \frac{I}{A} B h = R_H \frac{I}{h \times d} B h = \frac{R_H I B}{d}, \quad (47)$$

onde d é a espessura da placa (lembramos que h é a sua altura e que portanto a área é $A = lh$). Assim, o declive do gráfico $V_H(B)$ é

$$dec = \frac{R_H I}{d}, \quad (48)$$

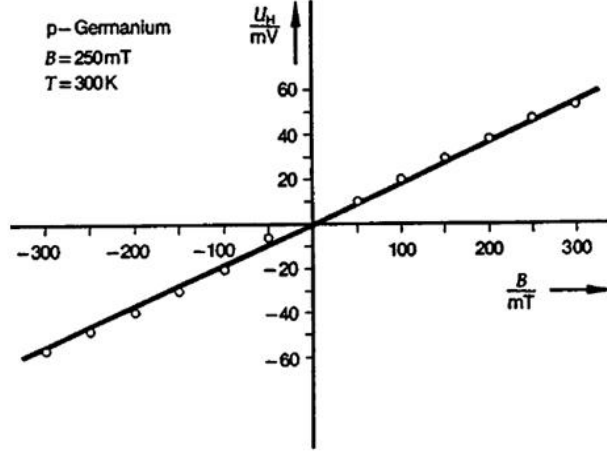


Figura 10: Quarta medição: $V_H = V_H(B)$. A partir desta medição podemos calcular R_H , p e μ_h

de onde podemos tirar a constante de Hall:

$$R_H = dec \frac{d}{I}. \quad (49)$$

Daqui podemos também tirar a concentração de portadores,

$$p = \frac{1}{eR_H}. \quad (50)$$

Mas não é tudo. A equação (15) permite escrever, na região em que as impurezas dominam,

$$\sigma = ep\mu_h = \frac{\mu_h}{R_H}. \quad (51)$$

Portanto, se soubermos a condutividade podemos também determinar a mobilidade das lacunas. Lembrando que a resistividade é $\rho = RA/l$, em que l é o comprimento da placa de Ge. Então $\sigma = \rho^{-1}$ e

$$\sigma = \frac{l}{RA} \quad (52)$$

e podemos usar o valor de R determinado na medição 2. Chamemos-lhe R_0 , sendo que o subscripto 0 indica temperatura ambiente. A expressão da mobilidade fica

finalmente

$$\mu_h = \frac{R_H l}{R_0 A}. \quad (53)$$

Os valores a usar para fazer estas determinações são $l = 0.02$ m, $h = 0.01$ m, $A = 1 \times 10^{-5}$ m².

3.6 Quinta medição: $E_H = E_H(T)$

Já sabemos que quando a temperatura varia passamos do regime de condutividade extrínseca para o de condutividade intrínseca. Então passa-se do regime (extrínseco) em que

$$E_H \approx \frac{j_x B}{ep}, \quad (54)$$

em que a tensão de Hall é positiva, para um regime (intrínseco) em que

$$E_H = -\frac{j_x B(n\mu_e^2 - p\mu_h^2)}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2}. \quad (55)$$

Quando o número de portadores intrínsecos domina esmagadoramente o número de portadores intrínsecos podemos assumir que

$$n = p \quad (56)$$

pois o pequeno acréscimo em p devido às impurezas é negligenciável. Nestas condições (55) simplifica-se para

$$E_H \approx -\frac{1}{en} \frac{\mu_e^2 - \mu_h^2}{(\mu_e + \mu_h)^2} j_x B, \quad (57)$$

o que quer dizer que o sinal do campo de Hall vai depender das mobilidades dos portadores. Como a mobilidade dos electrões é geralmente maior do que a das lacunas o campo de Hall acaba por tornar-se negativo. Esta inversão é característica dos semicondutores do tipo p.

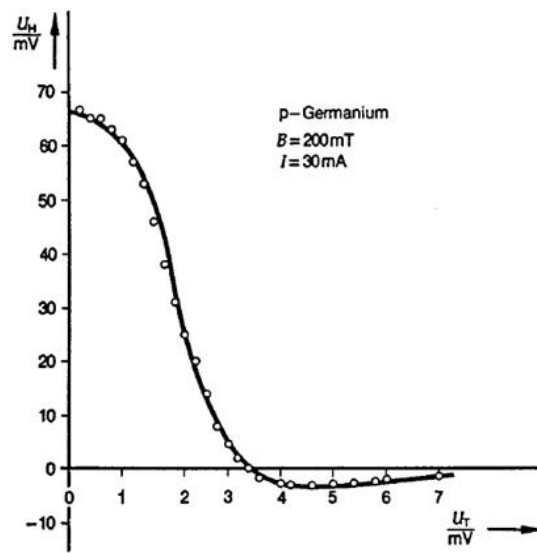


Figura 11: Quinta medição: $V_H = V_H(T)$. Observa-se a inversão do sinal da tensão de Hall, característica dos semicondutores do tipo p