

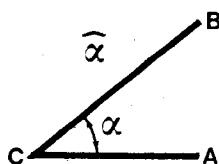
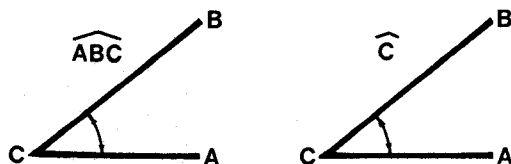
## NOÇÕES ELEMENTARES DE TRIGONOMETRIA

Ângulos.....	1
Seno dum ângulo.....	1
Co-seno dum ângulo.....	2
Tábuas trigonométricas.....	2
Construção de ângulos.....	3
Triângulos.....	3
Resolução de triângulos.....	4
Resolução de triângulos rectângulos.....	4
Exercícios.....	5

## ÂNGULOS

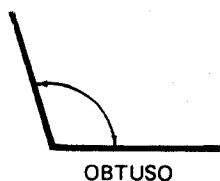
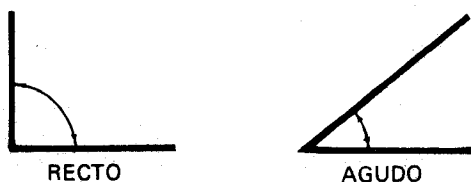
Um ângulo é uma porção de plano limitado por duas semi-rectas.

Podemos utilizar as seguintes representações:

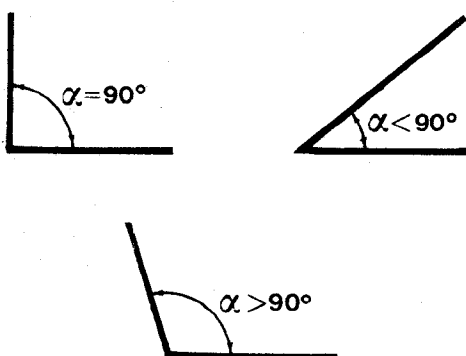


As semi-rectas são os lados do ângulo e a origem comum das semi-rectas é o vértice do ângulo.

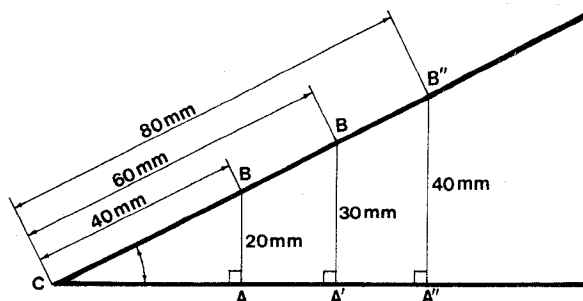
Os ângulos podem classificar-se em:



Os ângulos medem-se em graus. No caso do ângulo em que os lados são perpendiculares (ângulo recto) este mede  $90^\circ$ .



## SENO DUM ÂNGULO AGUDO



Seja o ângulo  $\widehat{ACB} = 30^\circ$

Sobre um dos lados, marquemos B, B' e B'' às distâncias de 40, 60 e 80 mm do vértice C. Dos pontos, B, B' e B'' tirem-se perpendiculares ao outro lado.

Medindo AB, A'B' e A''B'' obtêm-se respectivamente 20, 30 e 40 mm.

Comparando as relações  $\frac{AB}{BC}$ ,  $\frac{A'B'}{B'C}$  e  $\frac{A''B''}{B''C}$

verifica-se que são iguais

$$\frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \quad \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

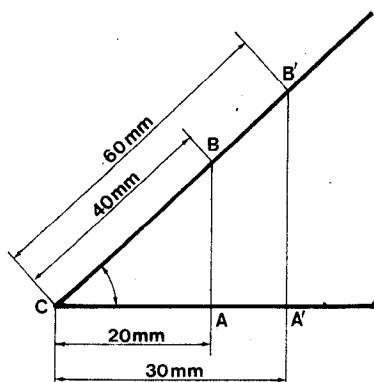
Este valor comum não depende da posição do ponto B, mas da medida do ângulo

A relação  $\frac{AB}{BC}$  (ou  $\frac{A'B'}{B'C}$ , ou  $\frac{A''B''}{B''C}$ )

chama-se seno do ângulo  $\widehat{ACB}$  (abreviadamente:  $\text{sen } \widehat{ACB}$ )

$$\text{sen } \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$$

## CO-SENO DUM ÂNGULO AGUDO



Seja o ângulo  $\widehat{ACB} = 60^\circ$

Sobre um dos lados marquemos A e A' às distâncias de 20 e 30 mm do vértice C. Dos pontos A e A' tirem-se perpendiculares.

Medindo BC e B'C obtêm-se respectivamente 40 e 60 mm.

Comparando as relações  $\frac{AC}{BC}$  e  $\frac{A'C}{B'C}$

verifica-se que são iguais.

$$\frac{20}{40} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Este valor comum não depende da posição do ponto B, mas da medida do ângulo

A relação  $\frac{AC}{BC}$  ou  $\frac{A'C}{B'C}$  chama-se co-seno do

ângulo ACB (Abreviadamente:  $\cos \widehat{ACB}$ )

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

## TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

Estas tábuas dão-nos valores do seno e co-seno dos ângulos de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

Graus	Seno	Co-seno	Graus	Seno	Co-seno
0	0,000	1,000	46	0,719	0,695
1	017	1,000	47	731	682
2	035	0,999	48	743	669
3	052	999	49	755	656
4	070	998	50	0,766	0,643
5	0,087	0,996	51	777	629
6	105	995	52	788	616
7	122	993	53	799	602
8	139	990	54	809	588
9	156	988	55	0,819	0,574
10	0,174	0,985	56	829	559
11	191	982	57	839	545
12	208	978	58	848	530
13	225	974	59	857	515
14	242	970	60	0,866	0,500
15	0,259	0,966	61	875	485
16	276	961	62	883	469
17	292	956	63	891	454
18	309	951	64	899	438
19	326	946	65	0,906	0,423
20	0,346	0,940	66	914	407
21	358	934	67	921	391
22	375	927	68	927	375
23	391	921	69	934	358
24	407	914	70	0,940	0,342
25	0,423	0,906	71	946	326
26	438	899	72	951	309
27	454	891	73	956	292
28	469	883	74	961	276
29	485	875	75	0,966	0,259
30	0,500	0,866	76	970	242
31	515	857	77	974	225
32	530	848	78	978	208
33	545	839	79	982	191
34	559	829	80	0,985	0,174
35	0,574	0,819	81	988	156
36	588	809	82	990	139
37	602	799	83	993	122
38	616	788	84	995	105
39	629	777	85	0,996	0,087
40	0,643	0,766	86	998	070
41	656	755	87	999	052
42	669	743	88	999	035
43	682	731	89	1,000	017
44	695	719	90	1,000	0,000
45	0,707	0,707			

Exemplos de utilização das tábuas:

$$\sin 20^\circ = 0,342$$

$$\cos 68^\circ = 0,375$$

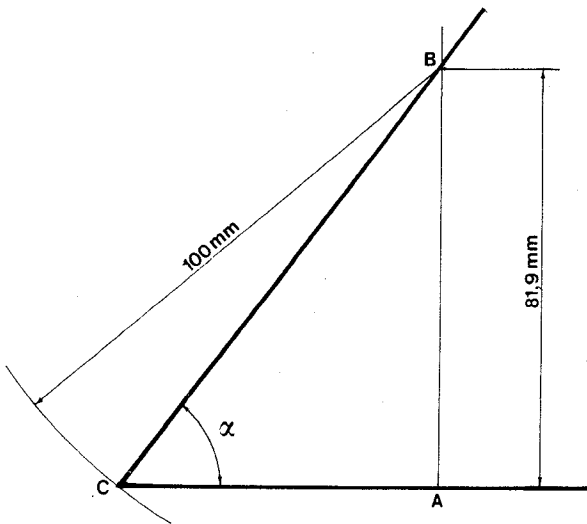
## CONSTRUÇÃO DE ÂNGULOS

- 1 — Pretende-se construir um ângulo agudo  $\alpha$  do qual se conhece o seno.

Por exemplo, se:  $\text{sen } \alpha = 0,819$

ou seja  $\text{sen } \alpha = \frac{819}{1000} = \frac{AB}{BC}$

Podemos construir a figura seguinte em que os comprimentos de AB e BC são proporcionais a 819 e 1000 respectivamente.



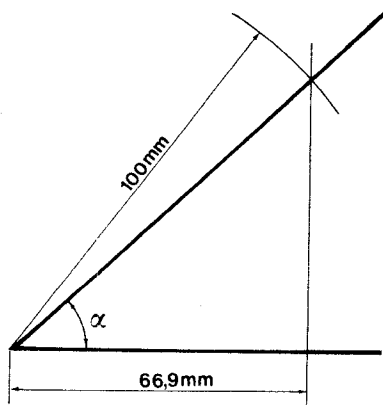
O ângulo procurado é  $\alpha = 55^\circ$

- 2 — Pretende-se construir um ângulo agudo  $\alpha$  do qual se conhece o co-seno.

Por exemplo, se:  $\cos \alpha = 0,669$

ou seja  $\cos \alpha = \frac{669}{1000} = \frac{AC}{BC}$

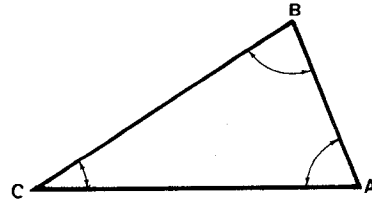
Podemos construir a figura seguinte em que os comprimentos de AC e BC são proporcionais a 669 e 1000 respectivamente.



O ângulo procurado é  $\alpha = 48^\circ$

## TRIÂNGULOS

Um triângulo é uma figura limitada por três segmentos de recta.

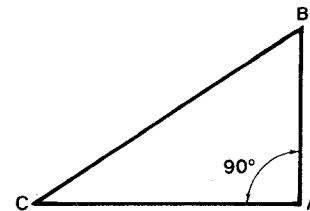


Os segmentos AB, BC e AC são os lados do triângulo e os pontos A, B e C são os vértices do triângulo.

A soma dos três ângulos dum triângulo é igual a  $180^\circ$

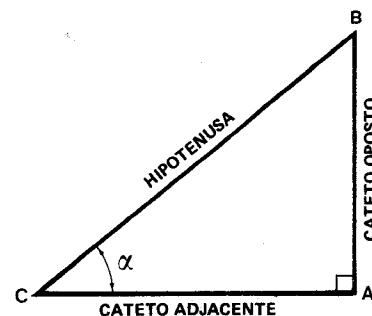
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Os triângulos em que um dos ângulos é recto, chamam-se triângulos rectângulos



Ao lado AC oposto ao ângulo recto dum triângulo rectângulo chama-se hipotenusa e aos outros dois lados AB e AC chamam-se catetos.

Num triângulo rectângulo



$$\text{sen } \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$\text{SENO dum ângulo agudo} = \frac{\text{CATETO OPOSTO a esse ângulo}}{\text{HIPOTENUSA}}$
---

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$$

$\text{CO-SENO dum ângulo agudo} = \frac{\text{CATETO ADJACENTE a esse ângulo}}{\text{HIPOTENUSA}}$
---

## RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

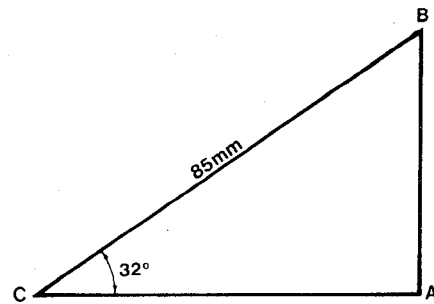
A trigonometria trata das relações entre os lados e os ângulos dos triângulos.

Um triângulo tem seis elementos principais, três ângulos e três lados, ficando completamente definido quando se conhecem três daqueles elementos, um dos quais tem de ser necessariamente um lado.

A resolução dum triângulo consiste em determinar, a partir das medidas dos lados ou ângulos conhecidos, as medidas dos restantes elementos do triângulo considerado.

## RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RECTÂNGULOS

1 — Pretende-se calcular os catetos AB e AC



Como conhecemos um ângulo e, a hipotenusa podemos utilizar a expressão do seno.

$$\text{seno } \widehat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \widehat{C} = \frac{AB}{BC} \quad \text{ou} \quad AB = BC \cdot \text{sen } \widehat{C}$$

$$\text{sen } \widehat{C} = \text{sen } 32^\circ = 0,530$$

$$AB = 85 \times 0,530 = \boxed{45,05 \text{ mm}}$$

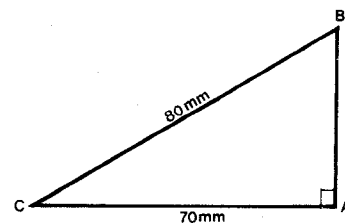
Para calcular AC utiliza-se a expressão:

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} \quad \text{ou} \quad AC = BC \cdot \cos \widehat{C}$$

$$\cos \widehat{C} = \cos 32^\circ = 0,848$$

$$AC = 85 \times 0,848 = \boxed{72,08 \text{ mm}}$$

2 — Pretendem-se calcular os ângulos  $\widehat{C}$  e  $\widehat{B}$  e o cateto AB



Conhecendo o cateto adjacente ao ângulo C e a hipotenusa podemos utilizar a expressão do co-seno.

$$\cos \widehat{C} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} \quad \text{ou} \quad \cos \widehat{C} = \frac{70}{80} = 0,875$$

Das tábuas trigonométricas tira-se

$$C = 29^\circ$$

Como a soma dos três ângulos dum triângulo é igual a  $180^\circ$

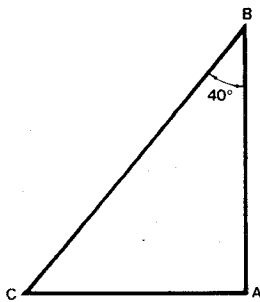
$$\widehat{B} = 90 - C = 61^\circ$$

$$\text{Como } \sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} \text{ ou } AB = BC \cdot \sin \widehat{C}$$

$$\sin 29^\circ = 0,485$$

$$AB = 80 \times 0,485 = 38,8 \text{ mm}$$

3 — Pretendem-se calcular os <sup>Lados</sup> catetos ~~AB~~ e AC



Como conhecemos um ângulo e o cateto oposto a esse ângulo utilizamos a expressão do seno.

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \text{ ou } BC = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\sin 40^\circ = 0,643$$

$$BC = \frac{45}{0,643} = 70 \text{ mm}$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90 - 40 = 50^\circ$$

$$\text{Como } \sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} \text{ ou } AB = BC \sin \widehat{C}$$

$$\sin \widehat{C} = \sin 50^\circ = 0,766$$

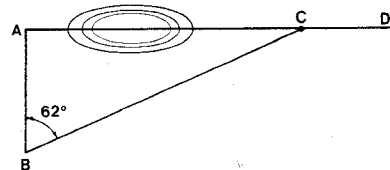
$$AB = 70 \times 0,766 = 53,6 \text{ mm}$$

## EXERCÍCIOS

1 — Num triângulo rectângulo ABC a hipotenusa BC mede 25 mm e o cateto AC mede 12,5 mm. Calcule o seno e o co-seno do ângulo B.

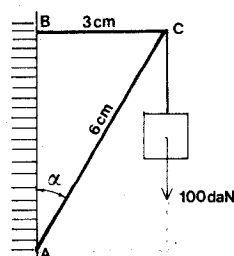
2 — Num triângulo rectângulo conhece-se a hipotenusa 30 mm e um ângulo agudo  $71^\circ$ . Determine o comprimento dos catetos.

3 — Na figura abaixo, a linha AD atravessa um pântano. A fim de determinar certo ponto C nessa linha, um topógrafo colocado em A, visou um ponto B situado a 500 m (para o que rodou o aparelho de  $90^\circ$ ). Mudando-se para o ponto B rodou o aparelho de  $62^\circ$  em relação a AB, visando C. Qual a distância AC?



4 — Considere duas forças  $F_1$  e  $F_2$  com a mesma intensidade, fazendo entre elas um ângulo de  $60^\circ$ . Determine a intensidade da resultante se  $F_1 = F_2 = 4\text{ N}$

5 — O corpo suspenso pesa 100 daN. Qual é o valor:



a) do ângulo  $\alpha$

b) da tracção na barra BC

c) da compressão na barra AC

5-

$$\sin \alpha = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{DC}{DE}$$

$$0,5 = \frac{DC}{115,47}$$

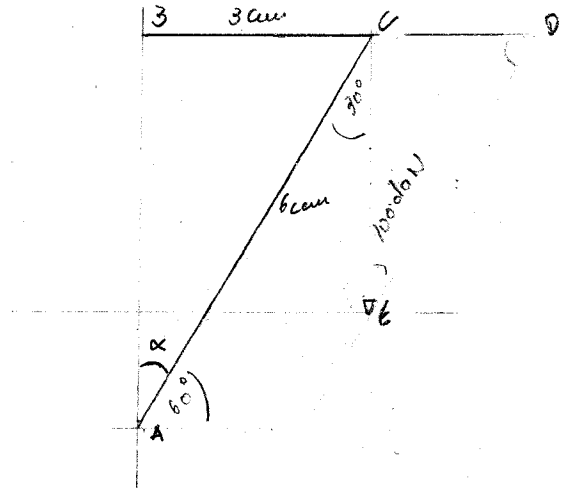
$$\Rightarrow DC = 115,47 \times 0,5 = 57,7 \text{ dan}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{100 \text{ dan}}{AC}$$

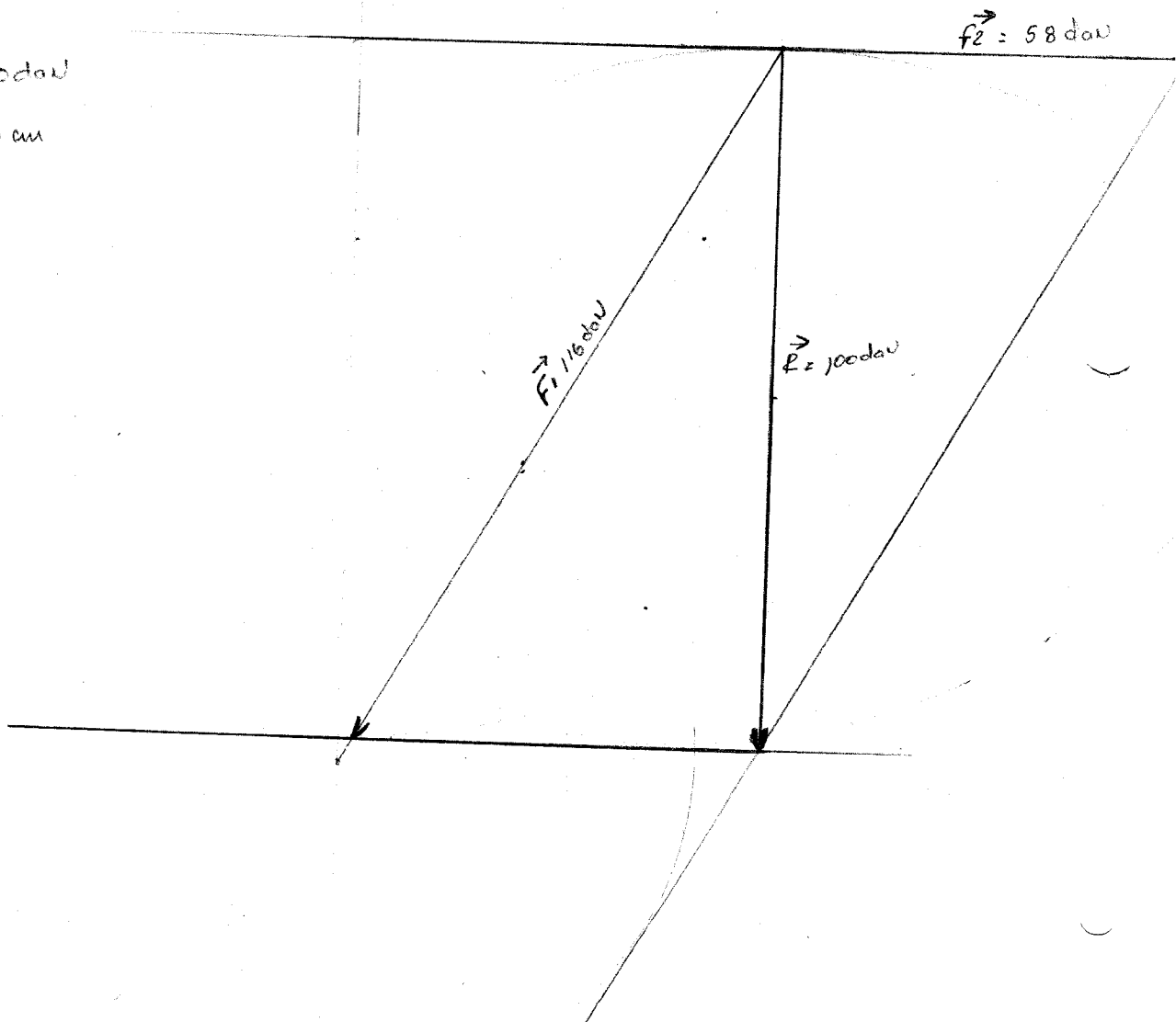
$$0,8660 = \frac{100}{AC} \Rightarrow AC = \frac{100}{0,8660} = 115,47 \text{ dan}$$

$$\text{terjadi pada } AC = 115,47 \text{ dan}$$

$$\text{terjadi pada } BC = 57,7 \text{ dan}$$



Skala  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ cm} \Rightarrow 10 \text{ dan} \\ 1 \text{ dan} \Rightarrow 1 \text{ cm} \end{array} \right.$



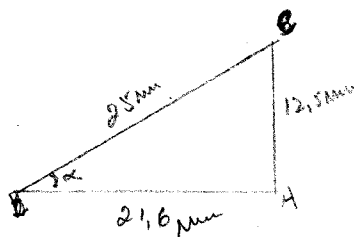
1-

$$\sin B = 0,5$$

$$\cos B =$$

$$\sin B = \frac{12,5}{25} = 0,5$$

$$\cos B = \frac{21,6}{25} = 0,864$$



$$\overline{BA} = 21,6 \text{ mm}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$25^2 = \overline{BA}^2 + 12,5^2$$

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

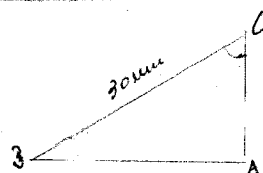
$$\overline{BA}^2 = 25^2 - 12,5^2$$

$$\overline{BA}^2 = 625 - 156,25 = 468,75$$

$$\overline{BA} = \sqrt{468,75} = 21,6 \text{ mm}$$

2-

$$\sin 71^\circ = \frac{\overline{AB}}{30} \Rightarrow 0,9455 = \frac{\overline{AB}}{30} \Rightarrow \overline{AB} = 0,9455 \times 30 = 28,36 \text{ mm}$$

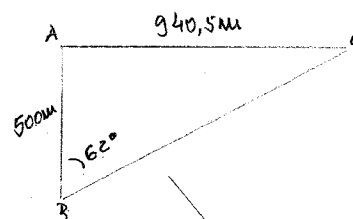


$$\cos 71^\circ = \frac{\overline{AC}}{30} \Rightarrow 0,3256 = \frac{\overline{AC}}{30} \Rightarrow \overline{AC} = 0,3256 \times 30 = 9,76 \text{ mm}$$

3-  $\overline{AB} = 500 \text{ m}$ 

$$\tan 62^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 62^\circ = \frac{\overline{AC}}{500}$$

$$1,881 = \frac{\overline{AC}}{500} \Rightarrow \overline{AC} = 500 \times 1,881 = 940,5 \text{ m}$$



4-

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{4} \Rightarrow 0,8660 = \frac{\overline{AC}}{4} \Rightarrow \overline{AC} = 4 \times 0,8660 = 3,46 \text{ N}$$

$$\text{Resultante} = 3,46 \times 2 = 6,92 \text{ N}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{Ax}{4} = \frac{3,46}{4}$$

$$Ax = 3,46$$

$$\vec{R} = 2 \times 3,46 = 6,92 \text{ N}$$

